UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Nociones de Análisis Funcional

Luis Bernal González

Tomás Domínguez Benavides

Departamento de Análisis Matemático

Edición: BGDB
Lugar y Año: Sevilla, 2009
ISBN: [a completar]

Índice general

Prólogo **3**

1. Espacios de Hilbert **7**

1.1. Introducción 7

1.2. Productos escalares. Espacios prehilbertianos 8

1.3. Distancia cuadrática. Espacios de Hilbert 11

1.4. Convexidad. Proyecciones. Teorema de Riesz 16

1.5. Ortonormalidad. Problema de aproximación 20

1.6. Espacios de Hilbert complejos 27

Ejercicios y Problemas 29

2. Espacios normados **33**

2.1. Introducción 33

2.2. Espacios normados y espacios de Banach 34

2.3. Operadores lineales continuos. Normas equivalentes. Espacio dual 39

2.4. Espacios normados de dimensión finita 42

Ejercicios y Problemas 45

3. Teorema de Hahn-Banach **51**

3.1. Introducción 51

3.2. El Teorema de Hahn-Banach 52

3.3. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach 54

3.4. Bidual. Espacios reflexivos 57

Ejercicios y Problemas 60

4. Principio de acotación uniforme **65**

4.1. Introducción. Teorema de Baire 65

4.2. Teorema de Banach-Steinhaus 68

4.3. Teorema de la Aplicación Abierta 74

4.4. Teorema del Grafo Cerrado 77

Ejercicios y Problemas 80

Bibliografía **87**

Índice alfabético **89**

Prólogo

El Análisis Funcional, denominado originalmente Cálculo Funcional –término acuñado hacia 1912 por J. Hadamard– tiene su origen en la necesidad de resolver problemas sobre “funciones cuyas variables independientes son también funciones”, lo que hoy llamamos “funcionales”. Ya en la segunda mitad del siglo XIX, J. Bernoulli, L. Euler y V. Volterra consideraron cuestiones de cálculo de variaciones, en las que la incógnita era una función o curva, y para cuya resolución era conveniente tratar con funciones que dependían de curvas. La evolución del Análisis Funcional durante el siglo XX, ayudado por el avance del Análisis Clásico y de la Topología, ha determinado un grado creciente de abstracción que ha desembocado en que el objeto de esta disciplina sea el estudio de los espacios topológicos –es decir, donde se ha definido alguna estructura que define la “cercanía”– que al mismo tiempo disfrutan de algún tipo de estructura algebraica –por ejemplo, linealidad– la cual es compatible en cierto sentido con la primera. Casos particulares de estos espacios serían las familias de funciones que son aspirantes a ser soluciones del tipo de problemas mencionados al principio.

La presente obra ha sido concebida pensando en la elaboración de un texto que pueda ser usado por los alumnos del Grado de Matemáticas para cursar los contenidos de Análisis Funcional que normalmente recogen los planes de estudio en dicho Grado, dentro de las materias obligatorias.

Utilizando un método en el que lo particular se deduce de lo general, un tratado sobre Análisis Funcional frecuentemente comienza con el estudio de los espacios vectoriales topológicos, continúa con los espacios lineales métricos, sigue con los espacios normados y concluye con los espacios prehilbertianos, amén de profundizaciones y aplicaciones intermedias y ulteriores. No obstante, nosotros hemos pretendido ofrecer un curso introductorio al Análisis Funcional. Es por ello por lo que no nos ha parecido conveniente comenzar con tanta generalidad sino, más bien al contrario, comenzar con los espacios con estructura más rica –los prehilbertianos– y continuar con los espacios vectoriales dotados de una norma no necesariamente euclídea. De hecho, estos dos tipos de espacios junto con los operadores entre ellos, incluyendo las funcionales lineales, y los teoremas fundamentales del análisis funcional (teoremas de la proyección, de Riesz, de Hahn-Banach, de la acotación uniforme, de la aplicación abierta y del grafo cerrado) constituyen el contenido total del libro.

Para la completa asimilación del contenido de este texto, es recomendable cierta familiaridad con la teoría de funciones de una y varias variables reales, incluyendo sucesiones y series, diferenciación total y parcial, integración de Riemann y de Lebesgue, así como con rudimentos de Álgebra Lineal y de Análisis de Fourier.

Esperamos que este pequeño libro permita posteriormente profundizar en el estudio de los espacios de funciones y abordar desde un punto de vista abstracto problemas de Análisis Clásico, Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones Integrales. Pero la presente obra pretende ser un texto más que un tratado. En consecuencia, los resultados están expuestos la mayoría de las veces en una forma práctica, pero no necesariamente en su forma más general. No forman parte del contenido del libro el estudio de los espacios lineales métricos ni de los espacios vectoriales topológicos en su contexto general. A pesar de ello, el estudiante quedará en posición para iniciarse en la investigación de los mismos. Esperamos que el texto pueda servir también como guía para el profesor que imparte la materia.

La obra contiene una cantidad notable de ejemplos que ilustran los conceptos y resultados que van surgiendo, así como una moderada pero variada cantidad de ejercicios propuestos, al final de cada capítulo, que están dirigidos o bien a aplicar la materia impartida o bien a introducir conceptos nuevos y teoremas complementarios. Al final se ofrece una bibliografía para que el estudiante interesado amplíe conocimientos. El índice alfabético está organizado de modo que se indica la página donde aparece por primera vez la definición de un concepto o la formulación de un resultado.

Para finalizar, quisiéramos reconocer, con sincero agradecimiento, el asesoramiento técnico proporcionado por nuestros colegas J.A. Prado-Bassas y J.A. Facenda en la elaboración del texto.

Los autores

Capítulo 1

Espacios de Hilbert

1.1. Introducción

Dentro de la familia de espacios vectoriales dotados de una estructura métrica, son los espacios de Hilbert los que, como generalización a cualquier dimensión del espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, presentan una estructura geométrica más rica y, por tanto, más sencilla de manejar. Comenzaremos por estudiar los espacios donde se ha definido un producto escalar, proporcionando diversos ejemplos. Veremos cómo se obtiene una distancia y una topología naturales. Analizaremos a continuación el problema de la mejor aproximación a un subespacio, usando las nociones de subconjunto convexo, de proyección y de ortogonalidad. Ello dará lugar, entre otras consecuencias, a la obtención de una estructura sencilla para las aplicaciones lineales y continuas sobre un espacio de Hilbert con valores en el cuerpo de escalares, y a una introducción natural a las series de Fourier abstractas.

1.2. Productos escalares. Espacios prehilbertianos

Como es usual, denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto $\{1, 2, \dots\}$ de los enteros positivos, por $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, y por $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.2.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Llamamos *producto escalar* sobre H a una aplicación $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ que cumple, para todos los vectores $x, y \in H$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, las siguientes propiedades:
(1) $(x|y) = (y|x)$
(2) $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$
(3) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
(4) $(x|x) \geq 0$
(5) $(x|x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
Un espacio vectorial H dotado de un producto escalar se denomina *espacio prehilbertiano*.

En otras palabras, un producto escalar es una forma bilineal simétrica definida positiva y no degenerada. La linealidad aparece sólo en la segunda variable, pero se cumple también para la primera en virtud de la simetría. De modo explícito, se obtienen las siguientes consecuencias inmediatas de la definición de producto escalar, válidas para todo par de vectores $x, y \in H$ y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:
(a) $(0|y) = 0$
(b) $(x|\alpha y) = \alpha(x|y)$
(c) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$.

Definición 1.2.2. Si H es un espacio prehilbertiano y $x \in H$, al número real no negativo $\sqrt{(x|x)}$ se le llama *norma* –o, más propiamente, *norma cuadrática*– de x. Denotaremos tal número por $\|x\|$.

Enumeramos en el siguiente resultado las propiedades principales de la norma en un espacio prehilbertiano.

Proposición 1.2.3. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano, que $x, y \in H$ y que $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

(1) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(3) $|(x|y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ [*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*]

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [*Desigualdad triangular*]

(5) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ [*Desigualdad triangular inversa*]

(6) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [*Identidad del paralelogramo*].

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son obvias.

En cuanto a (3), consideremos cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\|x - \lambda y\| \geq 0$, se tiene $(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0$, así que $\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda(x|y) \geq 0$ para todo λ. Ya que este trinomio de segundo grado (en λ) es siempre ≥ 0, deducimos que su discriminante es ≤ 0, es decir, $(x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Por otra parte, de la definición de norma y de (3), obtenemos que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y) \leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2$, de donde se deduce (4). Para obtener (5), simplemente aplicamos (4) a $x, y - x$. En efecto, sigue que $\|y\| = \|x+(y-x)\| \leq \|x\|+\|y-x\|$, luego $\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\|$. Invirtiendo los papeles de x, y, resulta $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$, de donde se deriva lo que queremos.

La igualdad (6) se obtiene de una simple manipulación algebraica, sin más que tener en cuenta la definición de norma y las propiedades de bilinealidad y simetría del producto escalar. □

Ejemplos 1.2.4. Los siguientes espacios son prehilbertianos si se les dota de los productos escalares respectivamente indicados:

1. $H = \mathbb{R}^N$ con $((x_1, \ldots, x_N)|(y_1, \ldots, y_N)) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.

2. $H = C([a,b])$, el espacio vectorial de las funciones reales continuas en un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

3. $H = \ell_2$, el espacio de las sucesiones reales $x = (x_i)$ de cuadrado sumable, es decir, tales que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$. Es obvio que $\lambda x \in \ell_2$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \ell_2$. Sean ahora $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ dos elementos de ℓ_2. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ a los vectores $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, $(|y_1|, \ldots, |y_n|)$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2)^{1/2} < +\infty.$$

Ya que esto es válido para todo n, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$ es convergente. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < +\infty.$$

Así que ℓ_2 es un espacio vectorial. Fácilmente se observa que $(x|y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ es un producto escalar al que corresponde la norma $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$.

4. $H = L^2([a,b])$, el espacio de las funciones medibles Lebesgue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de cuadrado integrable, es decir, tales que $\int_a^b f^2 < +\infty$, donde la integral se entiende en el sentido de Lebesgue. En tal espacio, estamos identificando dos funciones cuando son iguales en casi todo punto de $[a,b]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Así que, en rigor, estamos considerando el espacio $\mathcal{L}^2 = L^2([a,b])/\sim$ de las clases de equivalencia para la relación definida por: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ e.c.t. Prescindiremos de esta formalización de ahora en adelante, pero teniendo en cuenta que estamos tratando con clases de funciones.

Sean $f, g \in L^2([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Es evidente que $\lambda f \in L^2([a,b])$. Por otra parte, de la desigualdad $0 \leq (x-y)^2$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ se deduce que $|fg| \leq (1/2)(f^2 + g^2)$ en $[a,b]$. Por tanto $\int_a^b |fg| < +\infty$, así que $fg \in L^1([a,b])$, es decir, fg es Lebesgue-integrable en $[0,1]$ (recordar que $h \in L^1([a,b])$ si y sólo si h es medible y $\int_a^b |h| < +\infty$). Pero $f+g$ es medible y $(f+g)^2 = f^2+g^2+2fg$, luego $\int_a^b (f+g)^2 < +\infty$.

En consecuencia, $L^2([a,b])$ es un espacio vectorial. Ahora bien, la expresión $(f|g) = \int_a^b fg$ tiene sentido para cada par $f,g \in L^2([a,b])$ y, sin más que tener en cuenta que

$$\int_a^b f^2 = 0 \implies f = 0 \text{ e.c.t.}, \tag{P}$$

lo cual veremos más adelante, obtenemos fácilmente que es un producto escalar. La correspondiente norma cuadrática viene dada por $\|f\| = (\int_a^b f^2)^{1/2}$. Probemos la propiedad (P) establecida anteriormente: Basta demostrar que si $F : [a,b] \to [0,+\infty)$ es medible y $\int_a^b F = 0$, entonces $F = 0$ e.c.t. $[a,b]$, o equivalentemente, $\mu(A) = 0$, donde $A := \{x \in [a,b] :\ F(x) > 0\}$ y μ es la medida de Lebesgue unidimensional. Sea $A_n := \{x \in [a,b] :\ F(x) > 1/n\}$. Entonces $0 = \int_a^b F \geq \int_{A_n} 1/n \geq \mu(A_n)/n$, luego $\mu(A_n) = 0$. Pero $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, así que $\mu(A) = 0$.

5. Todo subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano es también un espacio prehilbertiano.

1.3. Distancia cuadrática. Espacios de Hilbert

A continuación, mostraremos cómo cada espacio prehilbertiano puede ser dotado, de manera natural, de una estructura de espacio métrico. La demostración es fácil a partir de las propiedades de la norma, y se deja como ejercicio.

Teorema-Definición 1.3.1. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano y que $\|\cdot\|$ es la correspondiente norma cuadrática. Entonces la función $d : (x,y) \in H \times H \mapsto d(x,y) = \|x-y\| \in [0,+\infty)$ es una distancia sobre H,*

es decir, verifica para todo $x, y, z \in H$ *las siguientes propiedades:*
(1) $d(x, y) = d(y, x)$
(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(3) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$
Tal distancia se denomina la distancia cuadrática *sobre* H*.*

Se deduce que todo espacio prehilbertiano puede ser dotado de estructura de espacio topológico. A saber, los abiertos de la topología serían las uniones arbitrarias de bolas abiertas $B(x, r) := \{y \in H : d(x, y) < r\}$ $(x \in H, r > 0)$. En particular, tiene sentido hablar de continuidad de aplicaciones $H \to T$, $T \to H$, donde T es cualquier espacio topológico.

En cuanto a la estructura métrica, recordemos algunos conceptos y propiedades relativos a un espacio métrico general (X, d):

- Una sucesión $(x_n) \subset X$ se denomina *convergente* cuando existe un elemento $x_0 \in X$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Tal x_0 es necesariamente único y se dice que es el *límite* de (x_n). Escribiremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ o bien $x_n \to x_0$.

- Una sucesión $(x_n) \subset X$ se dice que es *de Cauchy* cuando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

- Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no a la inversa, en general. El espacio métrico (X, d) se dice *completo* cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

- Sean $A \subset X$ y $x_0 \in A$. Se tiene que $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x_0$. Mediante $\overline{A}$ hemos denotado la clausura, cierre o adherencia de A. En particular, obtenemos que A es cerrado si y sólo si $[(x_n) \subset A,\ x_n \to x_0 \implies x_0 \in A]$.

- Supongamos que X es completo y $A \subset X$. Se verifica que A es cerrado si sólo si A, dotado de la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

- Si A y B son subconjuntos no vacíos de X y $x \in X$, la *distancia entre x y A* y la *distancia entre A y B* se definen, respectivamente, como $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ y $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

- Si Y es otro espacio métrico, $x_0 \in X$ y $F : X \to Y$ es una aplicación, entonces F es continua en x_0 si y sólo si, para cada sucesión $(x_n) \subset X$ con $x_n \to x_0$, se verifica $F(x_n) \to F(x_0)$.

Usando, por ejemplo, la caracterización de la continuidad en espacios métricos dada en el punto anterior, así como la desigualdad triangular inversa y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce fácilmente la siguiente proposición, cuya prueba se deja como ejercicio.

Proposición 1.3.2. *Si H es un espacio prehilbertiano, las aplicaciones $x \in H \mapsto \|x\| \in [0, +\infty)$ y $(x, y) \in H \times H \mapsto (x|y) \in \mathbb{R}$ son continuas.*

La completitud de la distancia cuadrática enriquece considerablemente las propiedades de un espacio prehilbertiano. Ello hace que tales espacios merezcan un nombre propio.

Definición 1.3.3. Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano que es completo para la distancia cuadrática.

Analicemos si los espacios prehilbertianos dados en la sección precedente son de Hilbert.

Ejemplos 1.3.4. 1. Basándose en la desigualdad $|x_i| \leq \|x\|$ $(i = 1, \ldots, N)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, así como en la completitud de $\mathbb{R}$, obtenemos que el espacio $\mathbb{R}^N$ es completo, luego es de Hilbert.

2. Sin embargo, el espacio prehilbertiano $C([a, b])$ no es completo. Lo veremos en el caso $[a, b] = [0, 1]$, siendo idéntica la prueba en el caso general, con los cambios obvios. Consideremos la sucesión de funciones continuas $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ constituida por líneas poligonales

$$f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, 1/2 - 1/n] \\ \frac{n}{2}x - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad z \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y escojamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 2/\varepsilon^2$. Supongamos que $m > n \geq n_0$. Ayudados de un dibujo de f_m y f_n, nos convencemos de que

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f_m(t) - f_n(t)|^2 \, dt \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon^2,$$

de donde $d(f_m, f_n) < \varepsilon$. Luego (f_n) es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, no existe $f \in C([0, 1])$ tal que $f_n \to f$ en norma cuadrática. En efecto, razonando por reducción al absurdo, supongamos que tal f existe. Fijemos un punto $t_0 \in [0, 1/2)$. Si $f(t_0) \neq 0$, existiría por continuidad un $\delta \in (0, 1/2 - t_0)$ tal que $|f(t)| > |f(t_0)|/2 =: c > 0$ para todo $t \in [0, t_0 + \delta]$. Entonces si n es tal que $1/2 - 1/n > t_0 + \delta$ se tiene que

$$\int_0^1 |f_n - f|^2 \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} |f_n - f|^2 = \int_{t_0}^{t_0+\delta} |0 - f|^2 \geq c^2 \delta.$$

Así, hemos llegado a que $\|f_n - f\| \geq \sqrt{\delta} c$ para todo n suficientemente grande, luego $f_n \not\to f$. Por tanto, debe ser $f(t_0) = 0$ para todo $t_0 \in [0, 1/2)$. Análogamente se prueba que $f(t_0) = 1$ para todo $t_0 \in (1/2, 1]$, lo que nos conduce a una contradicción con la continuidad de f en el punto $1/2$.

3. El espacio ℓ_2 es de Hilbert. Para probarlo, fijemos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset \ell_2$ de Cauchy en ℓ_2, donde $x_n = (\xi_1^n, \ldots, \xi_i^n, \ldots)$ $(n \in \mathbb{N})$. Debido a que la norma

de cada vector de ℓ_2 supera el valor absoluto de cada una de sus componentes, se sigue que, para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\xi_i^n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, cada una de estas sucesiones converge a un número $x_i \in \mathbb{R}$. Denotemos $x_0 := (\xi_i)_{i\geq 1}$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Así, para cada N, se deduce

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 < \varepsilon^2 \quad (n, m \geq n_0).$$

Haciendo que $n \to \infty$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - \xi_i^m|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (m \geq n_0) \tag{1}$$

Luego $x_0 - x_m \in \ell_2$ para todo $m \geq n_0$. Por tanto, tomando cualquiera de estos m, resulta $x_0 = (x_0 - x_m) + x_m \in \ell_2$, ya que ℓ_2 es un espacio vectorial. Finalmente, haciendo $N \to \infty$ en (1), llegamos a

$$\|x_m - x_0\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^m|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (m \geq n_0),$$

lo que entraña $x_m \to x_0$. Esto prueba la completitud de ℓ_2.

4. El espacio $L^2([a, b])$ es un espacio de Hilbert. Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^2([a, b])$. Gracias a un conocido teorema de Riesz y Fischer, existen una función $f \in L^2([a, b])$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tales que $f_n(t) \to f(t)$ e.c.t. $t \in [a, b]$. Recordemos ahora el Lema de Fatou: Si $h_k : [a, b] \to [0, +\infty)$ $(k \in \mathbb{N})$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_a^b \liminf_{k\to\infty} h_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b h_k.$$

Por ser (f_n) de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b |f_{n_k} - f_m|^2 < \varepsilon$ para todo $k, m \geq n_0$. Aplicando el Lema de Fatou a $h_k := |f_{n_k} - f_m|^2$, con

$m \geq n_0$ fijo, obtenemos

$$\|f_m - f\|^2 = \int_a^b |f - f_m|^2 \leq \varepsilon \quad (m \geq n_0),$$

de donde se se deduce que $f_n \to f$, y tenemos la completitud.

5. Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert es también un espacio de Hilbert.

1.4. Convexidad. Proyecciones. Teorema de Riesz

La convexidad y, en especial, el Teorema del vector minimizante, ocupan un lugar prominente en el estudio de la aproximación en espacios de Hilbert. Recordemos el concepto, puramente algebraico, de conjunto convexo.

Definición 1.4.1. Un subconjunto C de un espacio vectorial es *convexo* si, para todo par de puntos $x, y \in C$ y todo escalar $\lambda \in [0,1]$, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Dicho de manera geométrica, C es convexo cuando contiene los segmentos que unen puntos de C.

Teorema 1.4.2. [*Teorema del vector minimizante*]. *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces C contiene un único elemento de norma mínima.*

Demostración. Sea $\delta = \inf\{\|x\| : x \in C\}$. Hemos de demostrar que existe un único vector $x \in C$ tal que $\|x\| = \delta$. Vamos a probar, en primer lugar, la unicidad. Sean $x, y \in C$. Aplicando la identidad del paralelogramo a $x/2$ e

$y/2$, obtenemos

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Como $\frac{x+y}{2} \in C$, tenemos

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2. \tag{2}$$

Si ambos vectores x e y son de norma mínima, se tendría $\|x\| = \|y\| = \delta$, y deduciríamos de (2) que $\|x-y\| = 0$, así que $x = y$. Esto prueba la unicidad.

En cuanto a la existencia, tomemos una sucesión $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to \delta$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y seleccionemos un número $\eta \in (0, \min\{\varepsilon/4, \varepsilon^2/(16\delta)\})$. Podemos elegir un n_0 tal que $\|x_n\| < \delta + \eta$ para todo $n \geq n_0$. De nuevo aplicamos (2), pero esta vez a los vectores x_m, x_n con $m, n \geq n_0$. Resulta

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4\delta^2 < 4(\delta+\eta)^2 - 4\delta^2 = 4\eta^2 + 8\delta\eta < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2.$$

Esto implica que (x_n) es de Cauchy. Por ser H completo, existe un $x_0 \in H$ tal que $x_n \to x_0$. Debido a que C es cerrado, $x_0 \in C$. Por último, gracias a la continuidad de la norma, $\|x_n\| \to \|x_0\|$, luego, por la unicidad del límite, $\|x_0\| = \delta$. □

Corolario 1.4.3. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Hilbert H y $x \in C$. Entonces existe un único $c \in C$ tal que $\|x - c\| = d(x, C) = \inf\{\|x - u\| : u \in C\}$.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema del vector minimizante al conjunto $K = x - C := \{x - c : c \in C\}$. □

El punto c obtenido en el corolario anterior se denomina la *proyección* de x sobre C. A continuación, introducimos la noción de ortogonalidad.

Definición 1.4.4. Sean x e y dos vectores de un espacio prehilbertiano H. Decimos que x e y son *ortogonales* si $(x|y) = 0$. El *conjunto ortogonal de x*

se define como $x^\perp = \{y \in H : (x|y) = 0\}$. Si M es un subconjunto de x, el *conjunto ortogonal de M* se define como

$$M^\perp = \{y \in H : (x|y) = 0 \ \forall x \in M\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp.$$

Proposición 1.4.5. *Si H es un espacio prehilbertiano y $M \subset H$, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de H.*

Demostración. Ya que $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$, es suficiente probar que $x^\perp$ es cerrado para cada $x \in H$. Basta observar ahora que $x^\perp = \varphi^{-1}(\{0\})$, donde $\varphi : H \to \mathbb{R}$ es la función continua dada por $\varphi(y) = (x|y)$. $\square$

A continuación, veremos cómo se puede descomponer un espacio de Hilbert en suma de un subespacio prefijado y de su ortogonal. De hecho, la identidad va a resultar ser la suma de las proyecciones correspondientes.

Teorema-Definición 1.4.6. [*Teorema de la proyección*]. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces existe un único par de aplicaciones $P : H \to M$, $Q : H \to M^\perp$ tales que $x = Px + Qx$ para todo $x \in H$. Estas aplicaciones tienen las siguientes propiedades:*

(a) *Si $x \in M$ entonces $Px = x$ y $Qx = 0$. Si $x \in M^\perp$ entonces $Px = 0$ y $Qx = x$.*

(b) $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ *para todo $x \in H$.*

(c) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *para todo $x \in H$.*

(d) *P y Q son lineales.*

Las aplicaciones P y Q son las llamadas proyecciones ortogonales *de H sobre M y $M^\perp$, respectivamente.*

Demostración. Notemos que cada subespacio es convexo. Según el Corolario 1.4.3, para cada $x \in H$ existe un único $c \in M$ que verifica $\|x - c\| = d(x, M)$. Definimos $Px := c$ y $Qx := x - Px$. Entonces se cumple (b), y además $P(H) \subset M$ y $x = Px + Qx$. Veamos que $Q(H) \subset M^\perp$. Fijemos $x \in H$ e

$y \in M$. Hemos de probar que $(Qx|y) = 0$. Podemos suponer que $\|y\| = 1$. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $Px + \alpha y \in M$, así que, por (b), tenemos

$$(Qx, Qx) = \|Qx\|^2 = \|x - Px\|^2 \leq \|x - (Px + \alpha y)\|^2$$

$$= \|Qx - \alpha y\|^2 = (Qx - \alpha y|Qx - \alpha y) = (Qx|Qx) + \alpha^2 - 2\alpha(Qx|y).$$

Si ahora hacemos $\alpha = (Qx|y)$, resulta $-(Qx|y)^2 \geq 0$, de donde $(Qx|y) = 0$. Por tanto $Q(H) \subset M^\perp$. Para probar la unicidad, nótese que si $x = x_0 + x_1$, con $x \in M$ y $x \in M^\perp$, se tiene $x_0 - Px = Qx - x_1 \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $Px = x_0$, $Qx = x_1$, y el mismo razonamiento prueba (a).

La propiedad (c), que no es más que el Teorema de Pitágoras, es obvia, pues $(Px|Qx) = 0$. En cuanto a (d), fijemos dos vectores $x, y \in H$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y,$$

$$\alpha(Px + Qx) = \alpha x, \;\; \beta(Py + Qy) = \beta y.$$

Restando las dos últimas igualdades de la primera, obtenemos

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py + Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Qx - \beta Qy = 0,$$

de donde

$$M \ni P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Qx - \beta Qy \in M^\perp.$$

Esto fuerza a que ambos miembros sean cero, de donde se deduce (d). $\square$

Corolario 1.4.7. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H con $M \neq H$, entonces existe algún vector $x \in M^\perp \setminus \{0\}$.*

Demostración. Escoger $y \in H \setminus M$ y definir $x := Qy$. $\square$

Hemos visto ya que, para cada vector $y \in H$, la aplicación $x \in H \mapsto (x|y)$ es lineal y continua. En el siguiente importante teorema de representación veremos que, de hecho, cualquier aplicación lineal y continua de un espacio de Hilbert en $\mathbb{R}$ (es decir, cada elemento del "dual"de H, cfr. Capítulo 3) tiene esta sencilla forma.

Teorema 1.4.8. [*Teorema de representación de Riesz*]. *Supongamos que H es un espacio de Hilbert y que $T : H \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua. Entonces existe un único vector $y \in H$ tal que $Tx = (x|y)$ para todo $x \in H$.*

Demostración. La unicidad es fácil: Si hubiese dos vectores $y, z \in H$ con $Tx = (x|y)$ y $Tx = (x|z)$ para todo $x \in H$, se tendría que $(x|y - z) = 0$ para cualquier x, de donde, tomando $x = y - z$, se deduce $(y - z|y - z) = 0$. Entonces $\|y - z\| = 0$, luego $y = z$.

Probemos ahora la existencia. Si $T \equiv 0$, basta tomar $y = 0$. Supongamos que $T \not\equiv 0$. Entonces el núcleo de T, es decir, el conjunto $M := \operatorname{Ker} T = T^{-1}(\{0\})$, es un subespacio cerrado distinto de H. De acuerdo con el Corolario 1.4.3, existe algún vector $z \in M^{\perp} \setminus \{0\}$. Buscamos un vector y con $Tx \equiv (x|y)$, luego debe ser $Ty = \|y\|^2$. Tomamos entonces $y := \frac{Tz}{\|z\|^2} z$, que en efecto cumple $Ty = \|y\|^2$. Sea $x \in H$. Definimos $x' := x - \frac{Tx}{\|y\|^2} y$, $x'' := \frac{Tx}{\|y\|^2} y$. Entonces $Tx' = Tx - \frac{Tx}{\|y\|^2}\|y\|^2 = 0$. Luego $x' \in M$ y, por consiguiente, $(x'|y) = 0$. De aquí obtenemos $(x|y) = (x''|y) = (\frac{Tx}{\|y\|^2} y|y) = Tx$. $\square$

Anotamos aquí, para posteriores referencias, que se suele llamar "forma" o "funcional" a una aplicación $\varphi : H \to \mathbb{R}$, es decir, con valores en el cuerpo base.

1.5. Ortonormalidad. Problema de aproximación

Con la introducción del concepto de ortonormalidad, es posible resolver el problema de la mejor aproximación –es decir, de la menor distancia cuadrática– de un punto a un subespacio de dimensión finita. Consideraremos sinónimas las palabras “conjunto” y “sistema”.

Definición 1.5.1. Consideremos un conjunto de vectores $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en un espacio prehilbertiano H. Diremos que tal conjunto es *ortogonal* cuando $(u_\alpha|u_\beta) = 0$ para todo par $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$. Es *ortonormal* si, además, $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in A$. Si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un conjunto ortonormal y $x \in H$, a los números $(x|u_\alpha)$ se les llama *coeficientes de Fourier* de x respecto del sistema $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Ejemplo 1.5.2. Consideremos el espacio prehilbertiano $C([0, 2\pi])$, así como las funciones $u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $u_n(t) = \frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}}$, $u_{-n}(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es fácil ver que la familia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, llamada “sistema trigonométrico”, es un sistema ortonormal. Sea $f \in C([0, 2\pi])$. Los coeficientes de Fourier de f respecto de tal sistema son los números $c_n = \int_0^{2\pi} f(t)u_n(t)\, dt$ $(n \in \mathbb{Z})$. Es inmediato ver que $c_n = \sqrt{\pi}b_n$, $c_{-n} = \sqrt{\pi}a_n$ y $c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$, donde a_n $(n \geq 0)$ y b_n $(n \geq 1)$ son los coeficientes de Fourier “clásicos”de f, dados por $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt$ $(n \geq 0)$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt$ $(n \geq 1)$, y relacionados con f en la forma

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt).$$

Por supuesto, el sistema trigonométrico es también ortonormal en el espacio de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$.

Las normas de los vectores del subespacio generado por un sistema ortonormal son especialmente sencillas de manejar. Lo establecemos en la siguiente proposición, cuya prueba es inmediata y se deja como ejercicio.

Proposición 1.5.3. *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un sistema ortonormal finito en un espacio prehilbertiano H. Sea $x \in H$ y supongamos que, para ciertos escalares c_k $(k = 1, \ldots, n)$, se tiene $x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$. Se verifica:*

(a) $c_k = (x|u_k)$ $(k = 1, \dots, n)$.

(b) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ [*Teorema de Pitágoras*].

Corolario 1.5.4. *Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Demostración. En efecto, supongamos que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$, donde los vectores u_k pertenecen a un sistema ortonormal. Por el Teorema de Pitágoras, $0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$, luego cada λ_k es 0. $\square$

Como propusimos al principio de esta sección, vamos a estudiar un problema de aproximación. Si A es un subconjunto cualquiera de un espacio vectorial, denotaremos por $\operatorname{span} A$ (o bien por $\langle A\rangle$) el subespacio vectorial generado por A, es decir, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de los vectores de A. Supongamos que M es un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio prehilbertiano H. Estamos interesados en hallar el vector de M que da la mejor aproximación de un vector $x \in H$ prefijado al subespacio M. Por el procedimiento clásico de Gram-Schmidt, dada una base algebraica A de M, podemos hallar un sistema ortonormal B tal que $\operatorname{span} A = \operatorname{span} B = M$. Por tanto, nuestro problema de aproximación es equivalente al siguiente: Dados $x \in H$ y un sistema ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$, encontrar $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\|$ sea mínimo, o sea, hallar el vector de $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ que más se aproxima a x. Vamos a ver que la mejor aproximación se consigue eligiendo como c_k los coeficientes de Fourier de x.

Teorema 1.5.5. *Supongamos que H es un espacio prehilbertiano, que $x \in H$ y que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es un sistema ortonormal en H. Entonces, para cualquier elección de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, se tiene*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x|u_k) u_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|.$$

Además, la igualdad se da sólo si $\lambda_k = (x|u_k)$ $(k = 1, \dots, n)$.

Demostración. Denotemos $c_k := (x|u_k)$ para cada k. Usando que $(u_k|u_l) = 0$ si $k \neq l$, así como $(u_k|u_k) = 1$, obtenemos

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k | x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k) =$$

$$\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 - 2\lambda_k c_k) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - c_k)^2,$$

de donde se deduce el resultado. □

Nota 1.5.6. Con las notaciones y condiciones del teorema anterior, sea $M = \operatorname{span}\{u_k\}_{k=1}^n$. De acuerdo con el Teorema de la Proyección, el vector $\sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k$ es la proyección ortogonal de x en M. Por tanto, $\|x - \sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k\|^2 = d(x, M)^2$. Puesto que $\|x - \sum_{k=1}^n (x|u_k)u_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x|u_k)^2$, se obtiene $\sum_{k=1}^n (x|u_k)^2 = \|x\|^2 - d(x, M)^2$.

Como mostraremos seguidamente, el Teorema de Pitágoras no es válido en dimensión infinita. La versión infinito-dimensional del mismo es una igualdad condicionada, conocida como Identidad de Parseval. Antes de seguir, recordemos que en un espacio prehilbertiano H hay definida una métrica de manera natural, y por tanto una convergencia. Si (x_n) es una sucesión de vectores de H, que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge significa que existe un vector $u \in H$, necesariamente único, tal que $S_n \to u$ respecto de la distancia cuadrática, donde $S_n = x_1 + \cdots + x_n$, la sucesión de sumas parciales de (x_n). En tal caso, denotaremos $\sum_{n=1}^\infty x_n = u$. Si $x \in H$, llamaremos *serie de Fourier* asociada a x respecto de un sistema ortonormal dado $\{u_n\}_{n\geq 1}$ a la serie $\sum_{n=1}^\infty (x|u_k)u_k$.

Teorema 1.5.7. *Sean H un espacio prehilbertiano, $x \in H$ y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal en H. Se verifica:*

(a) [*Desigualdad de Bessel*] $\sum_{k=1}^\infty (x|u_k)^2 \leq \|x\|^2$.

(b) [*Identidad de Parseval*] *La serie de Fourier asociada a x converge a x*

si y sólo si $\sum_{k=1}^{n}(x|u_k)^2 = \|x\|^2$.
(c) *Si* H *es de Hilbert, entonces la serie de Fourier asociada a* x *es convergente.*

Demostración. Los apartados (a) y (b) resultan de la igualdad

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n}(x|u_k)u_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(x|u_k)^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Finalmente, (c) se obtiene de que la correspondiente sucesión (S_n) de sumas parciales de la serie de Fourier es de Cauchy –luego convergente, por ser H completo– ya que $\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}(x|u_k)^2$ si $m \geq n$. Notar que, por (a), la última expresión es $< \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ prefijado, si $m \geq n$ y n es suficientemente grande. $\square$

Notemos que en (c) no se ha dicho que, necesariamente, la serie de Fourier converja a x. El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.5.8. En un espacio prehilbertiano, un sistema ortonormal $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es *completo* si la identidad de Parseval vale para todo $x \in H$.

En el siguiente resultado, proporcionamos una caracterización de la completitud de un sistema ortonormal. Un subconjunto A de un espacio prehilbertiano se dice que es *total* cuando $\operatorname{span} A$ es denso en H.

Teorema 1.5.9. *Supongamos que* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano* H. *Son equivalentes las siguientes propiedades:*
(a) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es completo.*
(b) *Cada vector de* H *es la suma de su serie de Fourier relativa a* $\{u_n\}_{n\geq 1}$.
(c) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es total.*

Si H *es de Hilbert, entonces las propiedades anteriores son equivalentes a cada una de las siguientes:*
(d) $\{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp} = \{0\}$.

(e) *El sistema* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *es maximal, es decir, no está contenido estrictamente en ningún otro sistema ortonormal.*

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) viene dada por el segundo apartado del teorema anterior. Supongamos que (b) se cumple, y sea $x \in H$. Entonces $x = \lim_{n\to\infty} S_n$, donde (S_n) es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier asociada a x. Pero cada S_n está en $\mathrm{span}(u_n)$, de donde deducimos (c). Supongamos ahora que (c) se satisface y que, por reducción al absurdo, la propiedad (b) no se da, es decir, existe un vector $x \in H$ cuya serie de Fourier no converge a él. En tal caso, podemos hallar un $\alpha > 0$ y una sucesión estrictamente creciente (n_k) de números naturales tales que $\|S_{n_k} - x\| > \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $y \in \mathrm{span}(u_n)$. Entonces existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tales que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Definamos $\lambda_i = 0$ si $i > p$ y elijamos un $k \in \mathbb{N}$ con $n_k > p$. Se deduce, gracias al Teorema 1.5.5, que

$$\|x - y\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i u_i \right\| \geq \|x - S_{n_k}\| > \alpha.$$

En resumen, $\|x - y\| > \alpha$ para todo $y \in \mathrm{span}(u_n)$, lo que contradice (c). Así pues, (a), (b) y (c) son equivalentes.

Supongamos ahora que cualquiera de las tres propiedades anteriores es cierta, y que, por reducción al absurdo, el sistema $\{u_n\}_{n\geq 1}$ no es maximal. Esto significa que existe algún vector $x \in X$ con $\|x\| = 1$ que es ortogonal a todos los u_n, es decir, $(x|u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero ello conlleva $\|x\|^2 = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)^2 = 0$, lo que contradice (a). Esto prueba (e). Si (e) es cierta pero (d) no lo es, existiría un vector x no nulo con $x \in \{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp}$, así que el sistema $\{u_n\}_{n\geq 1} \cup \{x/\|x\|\}$ es ortonormal y contiene estrictamente a $\{u_n\}_{n\geq 1}$, lo cual es de nuevo una contradicción. Por tanto, (e) implica (d).

Finalmente, partimos de que H es un espacio de Hilbert y de que la propiedad (d) es válida. Nuestro objetivo es probar que (b) se verifica. Para ello, fijemos un vector $x \in H$ y recordemos que, por ser H de Hilbert, la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n$ es convergente. Llamemos, respectivamente, y al vector suma y (S_n) a la sucesión de sumas parciales de tal serie. Fijemos un $p \in \mathbb{N}$. Gracias a la continuidad del producto escalar, resulta que

$$(x - y|u_p) = (x - \lim_{n\to\infty} S_n|u_p) = \lim_{n\to\infty}(x - S_n|u_p)$$

$$= (x|u_p) - \lim_{n\to\infty}(S_n|u_p) = (x|u_p) - (x|u_p) = 0,$$

donde se ha usado que $(S_n|u_p) = (x|u_p)$ para cada $n \geq p$. Por tanto $x - y \in \{u_n\}_{n\geq 1}^{\perp} = \{0\}$, luego $x - y = 0$. Se deduce que $x = y = \sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n$, lo cual es (b). □

Un sistema ortonormal numerable $\{u_n\}_{n\geq 1}$ en un espacio de Hilbert H se dice que es una *base ortonormal* de H cuando cumple cualquiera de las propiedades equivalentes (a)–(e) del teorema anterior. Recordemos que un espacio topológico se dice *separable* cuando contiene algún subconjunto denso y numerable. Recordemos también que dos espacios métricos (X, d_1), (Y, d_2) son *isométricos* si existe una isometría entre ellos, es decir, una aplicación $\Phi : X \to Y$ biyectiva tal que $d_1(x, y) = d_2(\Phi(x), \Phi(y))$. Puede demostrarse que un espacio de Hilbert es separable si y sólo si contiene una base ortonormal. Además, todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométrico a ℓ_2. En efecto, una isometría entre ambos espacios viene dada por $\Phi : (x_n) \in \ell_2 \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$, donde $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base ortonormal (ver Ejercicio 2).

Ejemplo 1.5.10. El sistema trigonométrico visto en el Ejemplo 1.5.2 es completo. Por tanto, para cada $f \in L^2([0, 2\pi])$, se verifica la identidad de Parseval para series trigonométricas de Fourier:

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right).$$

Para probar que el sistema trigonométrico es completo, vamos a utilizar la caracterización (c) del teorema anterior junto con el Teorema de Fejér.

Este teorema afirma lo siguiente: Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua con $f(0) = f(2\pi)$. Entonces la serie de Fourier de f converge Cesàro uniformemente a f, o sea, si $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ y $\sigma_n(x) = \frac{s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\sigma_n \to f$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. También haremos uso del conocido hecho de la densidad de $C([0, 2\pi])$ en $L^2([0, 2\pi])$.

Demostremos la completitud. Notemos que cada función σ_n está en el conjunto $\operatorname{span}(u_n)$, donde (u_n) es el sistema trigonométrico. Fijemos una función $f \in L^2([0, 2\pi])$ y un $\varepsilon > 0$. Hemos de probar la existencia de una función $\sigma \in \operatorname{span}(u_n)$ tal que $\|f - \sigma\| < \varepsilon$. Por densidad, existe $g \in C([0, 2\pi])$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Llamemos $M := \sup_{[0,2\pi]} |g|$, y tomemos $\delta \in (0, \frac{\varepsilon^2}{36(1+M)^2})$. Definimos una función continua $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ como $h(t) = g(t)$ si $t \in [0, 2\pi - \delta]$, $h(2\pi) = g(0)$, haciéndola lineal afín en $[2\pi - \delta, 2\pi]$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} (g(t) - h(t))^2 \, dt = \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} (g(t) - h(t))^2 \, dt \le \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} (2M)^2 \, dt \le 4M^2\delta < \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Así, $\|g - h\|_2 < \varepsilon/3$. Finalmente, gracias al Teorema de Fejér, existe $\sigma \in \operatorname{span}(u_n)$ tal que $|\sigma(t) - h(t)| < \varepsilon/8$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Por tanto,

$$\int_0^{2\pi} (\sigma(t) - h(t))^2 \, dt \le 2\pi \frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon^2}{9},$$

o lo que es lo mismo, $\|\sigma - h\|_2 < \varepsilon/3$. En consecuencia, por la desigualdad triangular,

$$\|f - \sigma\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 + \|h - \sigma\| < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

1.6. Espacios de Hilbert complejos

Hasta ahora hemos estudiado espacios de Hilbert definidos para espacios vectoriales reales. Si tenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, hay que modificar un poco la definición de producto escalar. Observemos que, si mantenemos la primera definición, los axiomas serían incompatibles, pues $(ix|ix) > 0$ y $(x|x) > 0$ si $x \neq 0$, pero $0 < (ix|ix) = i^2(x|x) = -(x|x) < 0$.

Definición 1.6.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Llamamos *producto escalar* sobre H a una aplicación $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ que cumple, para todos los vectores $x, y \in H$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, las siguientes propiedades:
(1) $(x|y) = \overline{(y|x)}$
(2) $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$
(3) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
(4) $(x|x) \geq 0$
(5) $(x|x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
Un espacio vectorial complejo H dotado de un producto escalar se denomina *espacio prehilbertiano complejo*. Un espacio prehilbertiano sobre $\mathbb{C}$ que es completo para la distancia cuadrática se dice que es un *espacio de Hilbert complejo*.

Nótese ahora que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x, y \in H$, entonces $(x|\alpha y) = \overline{(\alpha y|x)} = \overline{\alpha(y|x)} = \overline{\alpha}(x|y)$. Por tanto, el producto escalar no es ya bilineal, sino sesquilineal. No obstante, los teoremas vistos en las primeras secciones para el caso real (desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad triangular, ley del paralelogramo, teorema de la proyección, teorema de representación de Riesz, desigualdad de Bessel, identidad de Parseval, etc) son también válidos para el caso complejo. En la desigualdad de Bessel e igualdad de Parseval, las expresiones $(x|u_k)^2$ deben sustituirse por $|(x|u_k)|^2$.

Ejercicios y Problemas

1.- Sea $\{e_\alpha\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano H. Probar que para cada $x \in H$ el conjunto $\{\alpha : (x|e_\alpha) \neq 0\}$ es numerable.

2.- Sea H un espacio de Hilbert. Un sistema ortonormal $\{e_\alpha\}$ es llamado "maximal"si ningún sistema ortonormal lo contiene estrictamente.

(a) Probar que en todo espacio de Hilbert existen sistemas ortonormales maximales y que un sistema ortonormal maximal genera un espacio vectorial denso en H.

(b) Probar que un espacio de Hilbert es separable si y sólo si existe un sistema ortonormal maximal numerable. Como consecuencia, probar que todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométrico a ℓ_2.

3.- Sea P el espacio vectorial de los polinomios reales con el producto escalar definido por

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Dar un ejemplo de un funcional lineal continuo sobre P para el cual no se cumpla el Teorema de Representación de Riesz.

4.- (a) Sea H el espacio de Hilbert $L^2([-1,1])$. Consideremos en H las funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad f_3(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Probar que forman un sistema ortonormal y describir algebraicamente el subespacio E que generan.

(b) Sea $f(x) = x^3$. Calcular la distancia de f a E.

5.- Si H es un espacio prehilbertiano y $A \subset H$, se llama subespacio cerrado generado por A a la intersección de todos los subespacios cerrados de H que contienen a A. Denotémoslo por H_A. Demostrar:

(a) Si M es un subespacio vectorial de H, entonces $\overline{M}$ es también un subespacio vectorial de H.

(b) H_A es el menor subespacio cerrado de H que contiene a A.

(c) $H_A = \overline{\operatorname{span} A}$.

Estas propiedades se extienden a espacios más generales que los prehilbertianos, ver Capítulo 2.

6.- Sea H el espacio de Hilbert ℓ_2 y E el subconjunto

$$E = \{x = (\xi_n) \in \ell_2 : \; 3\xi_1 = 4\xi_2\}.$$

Consideremos el vector $u = (1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...) \in \ell_2$.

(1) Probar que E es un subespacio cerrado de H.

(2) Determinar el subespacio $E^\perp$ ortogonal a E.

(3) Hallar la proyección de u sobre cada uno de los espacios E y $E^\perp$.

(4) Calcular la distancia de u a cada uno de los espacios E y $E^\perp$.

7.- Sea $\phi : \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = 2\xi_1$. Calcular la distancia del vector $x = (2^{-n/2})$ al núcleo de ϕ.

8.- Sea E el espacio vectorial formado por las sucesiones $x = (\xi_n)$ de números reales que son nulas a partir de un término, que depende de x. Definimos en E el producto escalar

$$((\xi_n)|(\eta_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

Sea F el subespacio de E formado por las sucesiones $(\xi_n) \in E$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0.$$

(1) Demostrar que $F^\perp = \{0\}$.

(2) Probar que F es un subespacio cerrado de E. ¿Es E un espacio de Hilbert?

9.- Sea H un espacio prehilbertiano y supongamos que $A \subset H$. Se define $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$. Demostrar que $A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp$ y que $A \subset A^{\perp\perp}$. Si $A \subset B \subset H$, probar que $B^\perp \subset A^\perp$.

10.- Sea H un espacio prehilbertiano y E un subespacio de H.

(a) Si H es completo y E es cerrado, probar que $E = E^{\perp\perp}$. *Indicación:* Tomar un vector $x \in E^{\perp\perp}$ y descomponerlo en suma de un vector de E y otro de $E^\perp$, de acuerdo con el Teorema de la Proyección.

(b) Probar que (a) puede no ser cierto si H no es completo o E no es cerrado. *Indicación:* Utilizar el Problema 8.

(c) Supongamos que $E^{\perp\perp} \neq E$ y sea $x \in E^{\perp\perp} \setminus E$. Probar que no existe $y_0 \in E$ tal que $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ para todo $y \in E$. *Indicación:* Proceder por reducción al absurdo y considerar, para cada $z \in E \setminus \{0\}$, el vector $y = y_0 + \frac{(z|x-y_0)}{\|z\|^2} z$.

11.- Si $H = L^2([0,1])$ y $A = \{f \in H : \int_0^1 f = 0\}$, hallar $A^\perp$. *Indicación:* Probar que $A = \{\text{constantes}\}^\perp$ y aplicar el apartado (a) del ejercicio anterior.

12.- Demostrar que el conjunto

$$E = \left\{ x = (x_n) \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$$

es un subespacio vectorial denso de ℓ_2.

13.- Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en la bola unidad cerrada de un espacio prehilbertiano tales que $(x_n|y_n) \to 1$. Probar que si (x_n) converge, entonces (y_n) converge al mismo límite.

14.- Sea H un espacio de Hilbert y sea $\varphi : H \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua. Supongamos que el vector $a \in H$ representa a φ, es decir, $\varphi(x) = (x|a)$ para todo $x \in H$. Demostrar que

$$d(x_0, \operatorname{Ker}\varphi) = \left| \left(x_0 | \frac{a}{\|a\|} \right) \right| \quad \forall x_0 \in H.$$

Indicación: Observar que el vector $x_0 - T(x_0)a/\|a\|^2$ pertenece a $\operatorname{Ker} T$.

15.- Resolver el apartado (4) del Problema 5 y el Problema 6 usando el resultado del Problema 13.

16.- En la Nota 1.5.6 se ha usado el Teorema de la Proyección, aunque el espacio H no es necesariamente completo. Justificar que, no obstante, puede usarse el resultado de dicho teorema. *Indicación:* El Teorema de la Proyección depende en última instancia del Teorema del vector minimizante, donde sólo se usa la completitud de C. Basta probar pues que el subespacio M de la Nota 1.5.6 es completo.

17.- En el espacio prehilbertiano $C([-1,1])$, con el producto escalar dado por $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$, consideremos el subconjunto M de las funciones f tales que $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

(a) Demostrar que M es un subespacio cerrado de $C([-1,1])$.

(b) Describir el subespacio $M^{\perp}$.

(c) ¿Se cumple el Teorema de la Proyección para $C([-1,1])$?

18.- Demostrar que en todo espacio prehilbertiano H se verifica la igualdad siguiente, llamada "Identidad de Apolonio":

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\| z - \frac{x+y}{2} \right\| \quad (x, y, z \in H).$$

Capítulo 2

Espacios normados

2.1. Introducción

Habíamos visto en el capítulo anterior que en los espacios de prehilbertianos se podía definir una norma a través del producto escalar por la fórmula $\|x\| = (x|y)^{1/2}$, y que ésta cumplía unas propiedades. En particular, tales propiedades servían para introducir una noción de distancia natural en dicho espacio, y por tanto una topología y una noción de convergencia. Como veremos en algunos ejemplos, en espacios sin producto escalar también puede definirse una norma con las mismas propiedades. Ello conduce a la noción de espacio normado y, en caso de haber completitud, al concepto de espacio de Banach. En este capítulo se estudiará la estructura de los espacios normados, la caracterización de las normas que conducen a una misma topología, así como de la continuidad de aplicaciones lineales entre espacios normados y de las normas que provienen de un producto escalar, y las profundas diferencias existentes entre los espacios normados de dimensión finita y los de dimensión infinita.

2.2. Espacios normados y espacios de Banach

Comencemos con la definición de norma, que axiomatiza algunas propiedades de la norma cuadrática. En principio, el cuerpo base de nuestro espacios vectoriales será $\mathbb{R}$, aunque la mayoría de los resultados que es expondrán son válidos también en espacios vectoriales complejos.

Definición 2.2.1. Sea X un espacio vectorial. Decimos que una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una norma sobre X si verifica, para todos los vectores $x, y \in X$ y todo escalar λ, las siguientes propiedades:
(a) $\|x\| \geq 0$
(b) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$
(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Llamaremos *espacio normado* a un espacio vectorial dotado de una norma.

Ejemplos 2.2.2. 1. Todo espacio prehilbertiano, con la norma cuadrática, es un espacio normado. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, dotado de la norma $\|x\|_2 := (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, donde $x = (x_1, ..., x_n)$, es un espacio normado.
2. La aplicación $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.
3. Asimismo, lo es $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$. Que son normas sobre $\mathbb{R}^n$ esta función y la del ejemplo anterior es fácil de probar.
4. Sea $p \in (1, +\infty)$. Para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Veamos que es una norma. Para ello necesitamos un resultado de convexidad, a saber, para cada $\alpha \in (0,1)$, la función $\varphi : t \in (0, +\infty) \mapsto t^\alpha \in \mathbb{R}$ es cóncava. En efecto, $\varphi''(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} < 0$. Por tanto, la curva que representa φ está por debajo de su tangente en el punto $t_0 = 1$, es decir, $t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha$ para todo $t > 0$. Si ponemos $t = u/v$, con $u, v > 0$, resulta

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v \quad (u, v > 0). \tag{1}$$

Ahora probamos la *desigualdad de Hölder*, a saber, si q es el "exponente conjugado" o "exponente dual" de p, es decir, el único $q > 1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, entonces, para todos los números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Si todos los x_i o todos los y_i son nulos, la desigualdad es obvia. Si éste no es el caso, tomemos $\alpha = 1/p$, $u = u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p}$, $v = v_i = \frac{|y_i|^p}{\sum_{k=1}^{n} |y_i|^p}$ $(i = 1, \ldots, n)$ en la expresión (1), y sumemos para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Obtenemos así

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i||y_i|}{(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{\alpha} v_i^{1-\alpha}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + (1-\alpha) v_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} v_i = 1,$$

de donde se infiere lo que queremos. De la desigualdad de Hölder se deduce la *desigualdad de Minkowski*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

En efecto, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \right\},$$

de donde se deduce lo que queríamos; la desigualdad de Hölder se ha aplicado en la última desigualdad. La desigualdad de Minkowski muestra que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$. De aquí obtenemos que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

5. Consideremos el espacio vectorial c_0 de la sucesiones reales (x_n) que tienden a 0. Es un espacio normado con la norma del supremo, $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Lo mismo ocurre con el espacio c_{00} de las sucesiones reales casi nulas, es decir, de las sucesiones $x = (x_n)$ tales que existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ con $x_n = 0$ para todo $n \geq N$. Con la misma norma, también el espacio vectorial ℓ_∞ de las sucesiones reales acotadas es un espacio normado. Nótese que $c_{00} \subset c_0 \subset \ell_\infty$.

6. Ya vimos en el capítulo anterior que ℓ_2 podía ser dotado de un producto escalar, luego es un espacio normado.

7. Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideremos el conjunto ℓ_p de las sucesiones reales $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty$. Usando la desigualdad de Minkowski demostrada en el Ejemplo 4, y haciendo que $n \to \infty$, se prueba con facilidad que ℓ_p es un espacio vectorial y que $\|x\|_p := (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ es una norma sobre él.

8. El espacio $C([a, b])$ es un espacio normado si se le dota de la aplicación $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$. Se prueba fácilmente que tal aplicación es una norma. Observemos que, en este espacio normado, $f_n \to f$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$.

9. En este ejemplo, como es habitual en estos casos, estamos considerando iguales dos funciones si son iguales en casi todo, respecto de la medida de Lebesgue. Sea $p \in [1, +\infty)$, y sea $L^p = L^p([a, b])$ la clase de las funciones medibles $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $\int_a^b |f|^p < +\infty$. Entonces L^p es un espacio vectorial y la aplicación $\|f\|_p = (\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ es una norma sobre él.

En efecto, este hecho es fácil de probar para $p = 1$, usando el álgebra de funciones medibles y la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$. Probemos el resultado para $p \in (1,+\infty)$. Es evidente que $\lambda f \in L^p$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L^p$, y que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. Sean $f, g \in L^p$. Queremos probar que $f+g \in L^p$. En primer lugar, $f+g$ es medible, y de la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ $(a, b \geq 0)$ se deriva con facilidad que $f+g \in L^p$.

Aplicamos (1) a $\alpha = 1/p$, $u = \frac{|f(t)|}{\int_a^b |f|^q}$ y $v = \frac{|g(t)|}{\int_a^b |g|^p}$, donde $t \in [a,b]$ y q es el exponente conjugado de p. Integrando la desigualdad resultante entre a y b, obtenemos la desigualdad de Hölder para integrales, a saber,

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Para la desigualdad de Minkowski, notemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b |f+g|^p &= \int_a^b |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)\\ &= \int_a^b |f+g|^{p-1}|f| + \int_a^b |f+g|^{p-1}|g| \qquad (2)\end{aligned}$$

Observemos que $|f+g|^{p-1} \in L^q$, porque $|f+g|^{q(p-1)} = |f+g|^p$. Aplicando la desigualdad de Hölder a cada uno de los sumandos de (2), se obtiene

$$\int_a^b |f+g|^p \leq \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right],$$

de donde derivamos la desigualdad de Minkowski, a saber,

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

De otra forma, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, que es la desigualdad triangular. Sigue que L^p es un espacio normado.

Como ya vimos en el Capítulo 1, la norma $\|\cdot\|$ induce una distancia o métrica $d(x,y) := \|x-y\|$ en el espacio normado, y por tanto una topología sobre él. Debido a ésto, tiene sentido hablar de continuidad de una aplicación. El siguiente resultado se deduce fácilmente de las propiedades de la norma, y su prueba se deja como ejercicio.

Proposición 2.2.3. *Supongamos que X es un espacio normado. Entonces las aplicaciones norma $x \in X \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$, suma $(x, y) \in X \times X \mapsto x+y \in X$ y producto por escalares $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \lambda x \in X$, son continuas.*

La existencia de una métrica natural en un espacio normado permite hablar de completitud.

Definición 2.2.4. Se llama *espacio de Banach* a un espacio normado que es completo para la distancia inducida por su norma.

Ejemplos 2.2.5. 1. Es fácil demostrar que los espacios c_0 y ℓ_∞ son completos. Para ello, tener en cuenta que $\mathbb{R}$ es completo y que, si una sucesión es de Cauchy $\|\cdot\|_\infty$, entonces cada sucesión componente debe ser de Cauchy en $\mathbb{R}$. Pero el espacio normado c_{00} no es completo: Basta considerar la sucesión $x_1 = (1, 0, 0, 0, ...)$, $x_2 = (1, 1/2, 0, 0, 0, ...)$, $x_3 = (1, 1/2, 1/3, 0, 0, 0, ...), \ldots$, que es de Cauchy pero no converge.
2. En del Capítulo 1 se vio que ℓ_2 es completo. Asimismo, cada ℓ_p $(1 \leq p < +\infty)$ es un espacio de Banach (cfr. Ejercicio 1).
3. De modo análogo a L^2 (ver Capítulo 1), se puede demostrar que los espacios L^p $(1 \leq p < +\infty)$ son completos.
4. Recordemos del Capítulo 1 que $C([a, b])$ dotado de la norma cuadrática no es completo. Sin embargo, si se le dota de la norma del supremo, $C([a, b])$ es un espacio de Banach. Para verlo, úsese la condición de Cauchy de convergencia uniforme (a saber, una sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en $[a, b]$ a alguna función $[a, b] \to \mathbb{R}$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_0$ y todo $x \in [a, b]$) y el hecho de que la convergencia uniforme preserva la continuidad.

De la continuidad de las aplicaciones suma y producto por escalares, de la caracterización por sucesiones de la clausura de un subconjunto en un espacio métrico, y del hecho de que, en un espacio métrico completo, un subconjunto es cerrado si y sólo si es completo (con la métrica inducida), se puede demostrar sin dificultad el siguiente teorema. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio.

Teorema 2.2.6. *Sea X un espacio normado, y supongamos que Y es un subespacio vectorial de X. Se verifica:*
(a) $\overline{Y}$ *es un subespacio vectorial de X.*
(b) *Si X es de Banach e Y es cerrado, entonces Y es un espacio de Banach.*

Para concluir, recordemos que todo producto escalar general una norma. Surge entonces la pregunta de si cada norma proviene de algún producto escalar. Puede probarse (cfr. Ejercicio 4) que, dada una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio vectorial X, existe un producto escalar $(\cdot|\cdot)$ sobre X tal que $\|\cdot\| = (\cdot|\cdot)^{1/2}$ si y sólo si $\|\cdot\|$ cumple la identidad del paralelogramo. En tal caso, se tiene la *identidad de polarización*:

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (x, y \in X).$$

2.3. Operadores lineales continuos. Normas equivalentes. Espacio dual

Vamos a probar que la continuidad de un operador lineal entre espacios normados es equivalente a la continuidad en un punto y a la continuidad uniforme. Mediante $\|\cdot\|$ denotaremos indistintamente, mientras no dé lugar a confusión, la norma tanto del espacio de salida como del espacio de llegada.

Teorema 2.3.1. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) *T es continua en algún punto $x_0 \in X$.*
(b) *T es continua.*

(c) T *es uniformemente continua.*

(d) *Existe* $M \in (0, +\infty)$ *tal que* $\|Tx\| \leq M\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

Demostración. Se tiene, obviamente, la siguiente cadena de implicaciones: (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Así que es suficiente probar (a) $\Rightarrow$ (d). Para ello, tomemos un punto $x_0 \in X$ donde T es continua. Entonces, dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Sea $y \in X$ con $\|y\| < \delta$. Entonces $\|Ty\| = \|T(y + x_0) - Tx_0\| < 1$. Sea ahora $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces $\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| < \delta$, luego $\|T(\frac{\delta x}{2\|x\|})\| < 1$. Por tanto $\|Tx\| \leq M\|x\|$, donde $M = 2/\delta$. Para $x = 0$, la desigualdad anterior es trivial. $\square$

Si X e Y son dos espacios vectoriales y $T : X \to Y$ es lineal y biyectiva, entonces la aplicación inversa $T^{-1} : Y \to X$ es también lineal. Tal T se dice que es un isomorfismo algebraico. Si X e Y son dos espacios normados, por *isomorfismo* entre ellos se entenderá un isomorfismo algebraico que es también topológico, es decir, tal que T y T^{-1} son continuas.

Teorema 2.3.2. *Supongamos que* X *e* Y *son dos espacios normados y que* $T : X \to Y$ *es una aplicación lineal y biyectiva. Entonces* T *es un isomorfismo si y sólo si existen dos constantes* $m, M \in (0, +\infty)$ *tales que*

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Demostración. Resulta de aplicar el teorema anterior a T y a T^{-1}. $\square$

Hay que tener presente que en un espacio vectorial X pueden definirse distintas normas. Diremos que dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ en X son *equivalentes* cuando generan la misma topología. Del teorema anterior obtenemos una caracterización de la equivalencia de normas.

Corolario 2.3.3. *Dos normas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *sobre un espacio vectorial* X *son* *equivalentes si y sólo si existen dos constantes* $m, M \in (0, +\infty)$ *tales que*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Demostración. Aplicar el teorema anterior a la aplicación identidad $T = I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. □

El Teorema 2.3.1 motiva el concepto de *norma de un operador lineal*, ver Teorema 2.3.4. Si X e Y son dos espacios normados, denotaremos por $L(X, Y)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Es fácil ver que, dotado de las operaciones usuales de suma y de producto por escalares, $L(X, Y)$ es un espacio vectorial. En el caso particular $Y = \mathbb{R}$, el espacio $L(X, \mathbb{R})$ se llama el *espacio dual* de X.

Teorema 2.3.4. *Sean* X *e* Y *dos espacios normados. Para cada* $T \in L(X, Y)$, *se define*

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

Entonces $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* $L(E, F)$. *Además,*

$$\|T\| = \text{mín}\{M \in [0, +\infty) : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

La prueba es mecánica, y se deja como ejercicio. Puede demostrarse (cfr. Ejercicio 7) que si Y es de Banach entonces $L(X, Y)$ es de Banach. En particular, el espacio dual de cualquier espacio normado es un espacio de Banach. Para cerrar esta sección, mostraremos que todo espacio de Hilbert puede identificarse perfectamente con su dual.

Teorema 2.3.5. *Si* H *es un espacio de Hilbert, entonces su dual* $L(H, \mathbb{R})$ *es isométricamente isomorfo a* H.

Demostración. Gracias al Teorema de Representación de Riesz, la aplicación $\Phi : y \in H \mapsto T_y \in L(H, \mathbb{R})$ definida por $T_y(x) = (x|y)$ $(x \in X)$ es biyectiva.

Es fácil ver que es Φ es lineal. Basta ver que Φ es una isometría, es decir, que conserva las distancias, pues entonces también sería bicontinua, o sea, continua ella y su inversa. Probemos pues que Φ es una isometría. Ya que Φ es lineal, hay que probar que $\|\Phi y\| = \|y\|$ para todo $y \in H$.

Para $y = 0$ es trivial. Así pues, fijemos $y \in H \setminus \{0\}$, y sea $x \in H$. Entonces $\|(\Phi y)x\| = |T_y(x)| = |(x|y)| \leq \|y\|\|x\|$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por la definición de norma de una aplicación lineal y continua, esto implica que $\|\Phi y\| \leq \|y\|$. Ahora bien, para $x = y$ se tiene que $\|(\Phi y)y\| = |(y|y)| = \|y\|\|y\|$, luego $\|(\Phi y)y\|/\|y\| = \|y\|$. Por tanto $\|\Phi y\| \geq \|y\|$. □

2.4. Espacios normados de dimensión finita

Sabemos que cualquier espacio vectorial X de dimensión finita n es isomorfo algebraicamente a $\mathbb{R}^n$. Vamos a ver que, si X es normado, entonces X es isomorfo también topológicamente a $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de sus normas.

Teorema 2.4.1. *Sea X un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to X$ un isomorfismo algebraico. Entonces T es bicontinua.*

Demostración. Denotemos $u_i = Te_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, se tiene que $Tx = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$. Entonces T es continua porque la convergencia en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ implica la convergencia en cada coordenada y las operaciones de suma y producto por escalares en un espacio normado son continuas.

Probemos que T^{-1} es también continua. Para ello, consideremos la esfera unidad $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, que es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, luego es compacto. Ya que T es continua, $T(S)$ es también compacto. Como $\|\cdot\|$ es continua en X, alcanza un mínimo m en $T(S)$. Debe ser $m > 0$, pues si fuera $m = 0$ existiría algún punto $x_0 \in S$ con $\|Tx_0\| = 0$, y por tanto

$x_0 = 0$ (pues T es biyectiva), lo que es absurdo. Sea ahora $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces $\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|_2} \in S$, luego

$$\left\| T\left(\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|_2} \right) \right\| \geq m,$$

de donde se deduce $\frac{\|x\|}{\|T^{-1}(x)\|_2} \geq m$, y así $\|T^{-1}(x)\|_2 \leq (1/m)\|x\|$. En consecuencia, T^{-1} es continua. $\square$

Del resultado anterior obtenemos, a continuación, algunas consecuencias.

Corolario 2.4.2. *Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$. La aplicación identidad $I : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un isomorfismo algebraico. Por el teorema anterior, I es bicontinua, luego $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes. La conclusión sigue de que la equivalencia de normas es una relación de equivalencia. $\square$

Nota 2.4.3. La conclusión del corolario anterior no es válida para espacios de dimensión infinita. Por ejemplo, en ℓ_1, su norma natural $\|\cdot\|_1$ no es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto, la sucesión (x_n) dada por $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e_k$ (donde $e_k = (0, 0, ..., 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$, con el 1 en el lugar k) tiende a 0 en $\|\cdot\|_\infty$, pero no converge en $\|\cdot\|_1$ ya que no está acotada ($\|x_n\| = n$ para cada n).

Corolario 2.4.4. *Sea Y un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X. Entonces Y es cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.1, existe un isomorfismo topológico

$$T : Y \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2).$$

Sea (x_n) una sucesión en Y con $x_n \to x \in X$. En particular, (x_n) es de Cauchy. Del Teorema 2.3.2 se deduce fácilmente que (Tx_n) es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, que es completo, luego existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que

$Tx_n \to \alpha$. De la continuidad de T^{-1} obtenemos que $x_n \to T^{-1}\alpha \in Y$. De la unicidad del límite en un espacio métrico, sigue que $x = T^{-1}\alpha$. Por tanto, $x \in Y$, y así Y es cerrado. □

Corolario 2.4.5. *Supongamos que X es un espacio normado de dimensión finita y que $A \subset X$. Entonces A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Las propiedades de ser acotado, de ser cerrado y de compacidad se conservan por isomorfismos topológicos entre espacios normados. Luego el Teorema de Heine-Borel, que caracteriza la compacidad en $\mathbb{R}^n$, conserva su validez en X. □

Para finalizar este capítulo, veremos que esta última propiedad caracteriza los espacios normados de dimensión finita. Antes necesitamos un resultado auxiliar, que es interesante en sí mismo.

Teorema 2.4.6. [*Lema de Riesz*]. *Sea X un espacio normado y X_0 un subespacio cerrado de X con $X_0 \neq X$. Entonces, para cada $\theta \in (0,1)$, existe un vector $x_\theta \in X$ tal que*

$$\|x_\theta\| = 1 \quad y \quad \|x - x_\theta\| \geq \theta \ \ \textit{para todo} \ \ x \in X_0.$$

Demostración. Tomemos $x_1 \in X \setminus X_0$ y llamemos $d = d(x_1, X_0)$. Notemos que $d > 0$ porque X_0 es cerrado. Fijemos $\theta \in (0,1)$. Entonces $d/\theta > d$. Se deduce que existe $x_0 \in X_0$ tal que $\|x_1 - x_0\| < d/\theta$. Tomemos $x_\theta := \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$. Si $x \in X_0$, tenemos que $\|x_1 - x_0\|x + x_0 \in X_0$, luego

$$\begin{aligned}\|x - x_\theta\| &= \left\| x + \frac{x_0}{\|x_1 - x_0\|} - \frac{x_1}{\|x_1 - x_0\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \big\| \|x_1 - x_0\|x + x_0 - x_1 \big\| \geq \frac{d}{\|x_1 - x_0\|} \geq \theta,\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Puntualizamos aquí que para $\theta = 1$ la conclusión del Lema de Riesz no es válida, cfr. Ejercicio 5.

Teorema 2.4.7. *Sea X un espacio normado tal que su bola unidad cerrada es compacta. Entonces* $\dim X < +\infty$.

Demostración. Si $\dim X = +\infty$, tomamos $x_1 \in S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$, y sea $X_1 = \langle x_1 \rangle$, que es un subespacio de X. Además, es un subespacio cerrado, por ser de dimensión finita. Pero $X_1 \neq X$, pues X es de dimensión infinita. Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in S$ tal que $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. Entonces $\langle x_1, x_2 \rangle$ es un subespacio cerrado de X que, de nuevo, no coincide con X. Usando una vez más el Lema de Riesz, existe un vector $x_3 \in S$ tal que $\|x_3 - x_1\| \geq 1/2$ y $\|x_3 - x_2\| \geq 1/2$. Procediendo por inducción, obtenemos una sucesión (x_n) tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ si $m \neq n$, luego esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente, lo que va en contra de la compacidad de la bola unidad cerrada. $\square$

Ejercicios y Problemas

1.- Demostrar que los espacios ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ son completos.

2.- Demostrar que los espacios ℓ_p son separables si $1 \leq p < \infty$. Probar que, sin embargo, ℓ_∞ no es separable.

3.- Sea Δ el disco unidad cerrado del plano complejo y $A(\Delta) =$ la familia de las funciones complejas continuas en Δ y analíticas en el interior de Δ. Probar que

$$\|f\| = \max_{z \in \Delta} |f(z)|$$

define una norma en este espacio. Probar que este espacio normado es separable.

4.- (a) Sea X un espacio normado, cuya norma satisface la identidad del paralelogramo, esto es,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo $x, y \in X$. Probar que la función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ por

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

define un producto escalar en X que verifica $\|x\|^2 = (x|x)$.
(b) Probar que la norma de los espacios c_0 y ℓ_p ($p \neq 2$) no cumple la ley del paralelogramo.

5.- Sea $X = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ con la norma del máximo e Y el subconjunto formado por las funciones $f \in X$ tales que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Probar que Y es un subespacio cerrado de X y que no existe $g \in X$ con $\|g\| = 1$ tal que $\|g - f\| \geq 1$ para todo $f \in Y$.

6.- Sean p y q con $1 \leq p < q \leq \infty$.
(a) Demostrar que $\ell_p \subset \ell_q$, $\ell_p \neq \ell_q$ y $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ para todo $x \in \ell_p$.
(b) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \ell_p$ tal que $\|x_n\|_p > n\|x_n\|_q$.
(c) Encontrar una sucesión $\{x_n\} \subset \ell_p$ que converja en ℓ_q pero no converja en ℓ_p.

7.- Sean E y F dos espacios normados, de modo que F es completo. Probar que $L(E,F)$ es completo.

8.- (a) Probar que, para cada $p \in [1,\infty)$, el espacio ℓ_p está contenido en c_0 y la inclusión $i : \ell_p \to c_0$ es continua.
(b) Probar que la sucesión

$$\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2}, \ldots, \frac{1}{\ln n}\right)$$

pertenece a c_0 pero no pertenece a ℓ_p para ningún p.

9.- Sea $X = C^1([0,1])$, el espacio vectorial formado por todas las funciones reales continuas y con derivada continua definidas en el intervalo $[0,1]$. Definimos la siguiente norma en este espacio:

$$\|f\| = \max\{|f(t)| + |f'(t)| : t \in [0,1]\}.$$

(1) Probar que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

(2) Probar que X con esta norma es un espacio de Banach.

(3) Sea $x_0 \in [0,1]$. Probar que $\|f\|_{x_0} := |f(x_0)| + \|f'\|_\infty$ es una norma en $C^1([0,1])$ equivalente a la norma anterior.

10.- Probar que en todo espacio normado X se tiene

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \quad (x, y \in X).$$

11.- Sea $C([0,1])$ el espacio vectorial formado por todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$, con la norma del máximo.

(a) Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ e $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ convergen en $C([0,1])$.

(b) Consideremos el conjunto $M = \{f \in C([0,1]) : \|f\| \leq 1,\ f(0) = f(1) = 0\}$. Estudiar si M es un subconjunto cerrado de $C([0,1])$. ¿Es M compacto?

12.- Consideremos la sucesión de funciones $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ dadas por

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$

Estudiar su convergencia en el espacio $C([0,1])$ con la norma del supremo y en el espacio $C^1([0,1])$ con la norma definida en el Ejercicio 9.

13.- Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios normados, y denotemos $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Supongamos que $|\cdot|$ es una norma monótona en $\mathbb{R}^n$, esto es, $|(a_1, ..., a_n)| \leq$

$|(b_1, ..., b_n)|$ si $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Probar:

(a) La aplicación $\|x\| = |(\|x_1\|, ..., \|x_n\|)|$ es una norma en X.

(b) Todas las normas obtenidas en (a) son equivalentes.

(c) Si todos los espacios X_i son completos, entonces X es completo.

14.- Sea X un espacio normado y E un subespacio cerrado de X. Consideremos el espacio vectorial cociente X/E con las operaciones

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{y} \quad \alpha[x] = [\alpha x].$$

(a) Probar que la fórmula $\|[x]\| = \inf\{\|y\| : y \in [x]\}$ define una norma en X/E.

(b) Probar que X/E es de Banach si X lo es.

15.- En el espacio ℓ_2 consideremos la aplicación lineal $\Lambda : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\Lambda(x) = 2\xi_1 + \xi_3$, supuesto que $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(a) Probar que Λ es lineal y continua.

(b) Hallar la distancia del vector $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ al núcleo de Λ.

16.- Consideremos el espacio $C([0, 1])$ dotado de la norma del supremo, y el espacio $C^1([0, 1])$ dotado de la norma $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Demostrar que el "operador de Volterra" $T : C([0, 1]) \to C^1([0, 1])$ dado por $(Tf)(x) = \int_0^1 f(t)\, dt$ $(x \in [0, 1])$ está bien definido y es una aplicación lineal y continua. Calcular su norma.

17.- Sean X, Y, Z tres espacios normados. Supongamos que $S \in L(X, Y)$ y $T \in L(Y, Z)$. Probar que $T \circ S \in L(X, Z)$ y que $\|T \circ S\| \leq \|T\|\, \|S\|$.

18.- Sea X un espacio normado. Probar que son equivalentes las siguientes propiedades:

(a) Si $(x_n) \subset X$ es una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X.

(b) X es un espacio de Banach.

19.- Sea X un espacio normado separable. Demostrar que existe un subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $\operatorname{span} K$ es denso en X. *Indicación:* Considerar el conjunto $\{\frac{x_n}{n(1+\|x_n\|)} : n \geq 1\}$, donde $\{x_n : n \geq 1\}$ es una sucesión densa en X.

20.- Sea H un espacio de Hilbert y $P : H \to H$ una proyección, es decir, P es lineal y continua y cumple $P^2 = P$. Decimos que P es ortogonal si su núcleo y su rango son ortogonales.

(a) Probar que si P es ortogonal, entonces $\|P\| = 1$.

(b) Probar que si $\|P\| = 1$, entonces P es ortogonal. *Indicación:* Dados y en el rango de P y z en el núcleo de P, considerar $x = \lambda y + z$.

(c) Probar que para todo operador lineal y continuo $T : H \to H$ existe un único operador T^* –llamado *adjunto* de T– tal que $(T^*x|y) = (x|T^*y)$ para todo par $x, y \in H$.

(d) Decimos que un operador $T : H \to H$ es autoadjunto si $T^* = T$. Probar que una proyección $P : H \to H$ es autoadjunta si y sólo si es ortogonal.

21.- Probar que la norma euclídea no es equivalente a la norma del supremo en ℓ_2. *Indicación:* Considerar la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \ell_2$ dada por $x_n = \sum_{j=n+1}^{2n} j^{-1/2} e_j$, donde $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, con el 1 ubicado en el lugar n.

Capítulo 3

Teorema de Hahn-Banach

3.1. Introducción

Una vez introducidos los espacios vectoriales más importantes donde se tiene una estructura métrica –a saber, los espacios de Hilbert y los espacios de Banach– presentaremos sucesivamente los cuatro teoremas que son considerados como los pilares del Análisis Funcional, a saber, el Teorema de Hahn-Banach, El Principio de la Acotación Uniforme, El Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Grafo Cerrado.

En este capítulo enunciaremos y probaremos el Teorema de Hahn-Banach, que es un resultado crucial de extensión de funcionales lineales, con importantes consecuencias. Una de ellas es que el dual de cualquier espacio normado es no trivial, es decir, no se reduce a $\{0\}$, e incluso es "bastante grande", en cierto sentido. Introduciremos también el bidual de un espacio normado, así como el concepto de espacio reflexivo, del cual un espacio de Hilbert es el ejemplo más destacado.

Antes de comenzar, es conveniente recordar un instrumento fundamental en Teoría de Conjuntos, que posee múltiples aplicaciones, a saber, el *Lema de*

Zorn. Su enunciado es el siguiente: Sea $\mathcal{A}$ un conjunto parcialmente ordenado, es decir, en $\mathcal{A}$ se ha dado alguna relación de orden, la cual denotamos por "$\leq$". Supongamos que cada cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$ –es decir, cada subconjunto totalmente ordenado– admite una cota superior en $\mathcal{A}$, esto es, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $x \leq \alpha$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{A}$ posee algún elemento maximal, o sea, existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que $[\delta \in \mathcal{A}$ y $\gamma \leq \delta]$ implica $\delta = \gamma$.

3.2. El Teorema de Hahn-Banach

Partimos de un resultado de extensión algebraica. Supongamos que E es un espacio vectorial, M es un subespacio vectorial de E y $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. No es difícil construir una extensión lineal g de f a todo E. Basta tomar una base algebraica de M y completarla hasta obtener una base de E; por último, se define g como f en M, y arbitrariamente en los nuevos vectores base, y se extiende linealmente a la variedad lineal generada por la nueva base, que es E. Lo que no es tan fácil es conseguir "controlar"la extensión lineal a E si ya había cierto control en la aplicación lineal original. Esto es lo que hace el Teorema de Hahn-Banach. Antes, necesitamos un concepto que precise qué funciones son las que ejercen el control.

Definición 3.2.1. Sea E un espacio vectorial real. Una función $p : E \to \mathbb{R}$ es un *funcional sublineal* o *subnorma* si cumple las siguientes propiedades:
(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.
(2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$.

Por ejemplo, la norma en un espacio normado X es un funcional lineal.

Teorema 3.2.2. [*Teorema de Hahn-Banach*]. *Sea E un espacio vectorial real y M un subespacio de E. Supongamos que p es un funcional sublineal sobre E, que $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo*

$x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de todas las aplicaciones h lineales y reales definidas en algún subespacio $D(h)$ de E tales que $D(h) \supset M$, $h|_M = f$ y $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$. Esta familia es no vacía pues $f \in \mathcal{A}$. Podemos definir en $\mathcal{A}$ un orden parcial poniendo $h_1 \leq h_2$ si $D(h_1) \subset D(h_2)$ y h_2 es una extensión de h_1. Queremos aplicar el Lema de Zorn a la familia $\mathcal{A}$, dotada del orden parcial anterior.

Para ello, fijemos una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$. Llamemos $D := \bigcup_{h \in \mathcal{C}} D(h)$. Ya que $\mathcal{C}$ está totalmente ordenado, se deduce que D es un subespacio vectorial de E y que la aplicación $u : D \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$ con $h \in \mathcal{C}$ está bien definida y es lineal. Es claro que $h \leq u$ para toda aplicación $h \in \mathcal{C}$. Por tanto $\mathcal{C}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$. En consecuencia, $\mathcal{A}$ tiene algún elemento maximal, sea g. Entonces g es lineal, $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(g)$. Basta probar que $D(g) = E$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe algún vector $y \in E \setminus D(g)$. Sea $H = \{x + \alpha y : x \in D(g), \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}(D(g) \cup \{y\})$. Es evidente que H es un subespacio vectorial de E con $D \subset H$ y $D \neq H$. Además, puesto que $y \notin D(g)$, podemos extender linealmente g a H mediante la aplicación (notemos que la descomposición de cada $z \in H$ como $z = x + \alpha y$ es única) dada por

$$h : z = x + \alpha y \in H \mapsto g(x) + \alpha c \in \mathbb{R},$$

donde c es un número real fijo, pero arbitrario. Vamos a elegir c tal que $h(z) \leq p(z)$ para todo $z \in H$, con lo que llegaríamos a contradicción con la maximalidad de g.

Necesitamos que se cumpla

$$g(x) + \alpha c \leq p(x + \alpha y) \quad (x \in D(g),\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Esto es equivalente a

$$g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + c \le p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right) \quad (\alpha > 0,\ x_1 \in D(g)) \quad \text{y}$$

$$g\left(\frac{x_2}{\beta}\right) + c \ge \frac{1}{\beta}\, p\left(\frac{-\beta(x_2 + \beta y)}{-\beta}\right) = -p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right) \quad (\beta < 0,\ x_2 \in D(g)),$$

lo cual a su vez equivale a

$$-p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right) + g\left(-\frac{x_2}{\beta}\right) \le c \le p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right) - g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right).$$

Como x_1/α y $-x_2/\beta$ son puntos arbitrarios en $D(g)$, basta encontrar c tal que

$$g(u) - p(u - y) \le c \le p(v + y) - g(v) \ \text{ para todo } u, v \in D(g).$$

Ahora bien, sabemos que

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \le p(u + v) \le p(u - y) + p(v + y),$$

de donde resulta

$$g(u) - p(u - y) \le p(v + y) - g(v) \ \text{ para todo } u, v \in D(g).$$

Por tanto $a \le b$, donde

$$a := \sup\{g(u) - p(u - y) :\ u \in D(g)\} \quad \text{y} \quad b := \inf\{p(v + y) - g(v) :\ v \in D(g)\}.$$

Tomando $c \in [a, b]$ se obtiene el resultado. □

3.3. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

Recordemos que el dual de un espacio normado X se define como el espacio $L(X, \mathbb{K})$ de las formas lineales y continuas de X en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Denotaremos el espacio dual de X por X^*. Una propiedad importante es que el dual es siempre un espacio de Banach. La primera consecuencia del Teorema de Hahn-Banach nos dice que es posible extender formas lineales y continuas manteniendo la norma.

Corolario 3.3.1. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $f : M \to \mathbb{R}$ una forma lineal y continua. Entonces existe $g \in X^*$ tal que $g|_M = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

Demostración. Definamos $p : X \to \mathbb{R}$ por $p(x) = \|f\|\|x\|$. Como la norma es sublineal, se obtiene que p es un funcional sublineal. Además $f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x)$ para todo $x \in M$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación lineal $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Así $g(x) \leq \|f\|\,\|x\|$ y $-g(x) = g(-x) \leq \|f\|\,\|x\|$. Por tanto $|g(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ para todo $x \in X$, de donde $\|g\| \leq \|f\|$. Pero g es una extensión de f, luego $\|f\| \leq \|g\|$, con lo cual $\|g\| = \|f\|$. □

Nota 3.3.2. El corolario anterior también es cierto para espacios normados sobre $\mathbb{C}$, aunque no vamos a ver la demostración.

Una segunda consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, que enunciaremos a continuación, caracteriza la clausura de un subespacio vectorial en términos de las funcionales que se anulen sobre él.

Teorema 3.3.3. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X. Supongamos que $x_0 \in X$. Entonces $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si cada funcional $f \in X^*$ tal que $f|_M \equiv 0$ se anula en x_0.*

Demostración. Por continuidad, es claro que si $x_0 \in \overline{M}$ y $f : X \to \mathbb{K}$ es continua y se anula en M, entonces $f(x_0) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $x_0 \notin \overline{M}$. Hemos de encontrar un funcional $f \in X^*$ con $f|_M \equiv 0$ pero tal que $f(x_0) \neq 0$.

Para ello, fijemos $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \cap M = \emptyset$. Entonces $\|x - x_0\| \geq \delta$ para todo $x \in M$. Sea $\widehat{M}$ el subespacio generado por M y x_0, es decir, la suma algebraica de M y la recta $\langle x_0 \rangle$ de los múltiplos escalares de x_0. Nótese que la suma es directa, es decir, $M \cap \langle x_0 \rangle = \emptyset$. Por tanto, la aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ dada por $f(x + \lambda x_0) = \lambda$ está bien definida y, obviamente, es lineal. Por otra parte, es continua en M con norma $\leq 1/\delta$. En efecto, si $x \in M$ y $\lambda \neq 0$, se tiene $\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \, \|x_0 + \lambda^{-1} x\| \geq |\lambda| \delta$. En consecuencia, $|f(x + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq \delta^{-1} \|x + \lambda x_0\|$ para todo $x \in M$ y todo escalar λ, luego $\|f\| \leq 1/\delta$. Además, es obvio que $f|_M \equiv 0$ y $f(x_0) = 1$. Basta ahora extender f a un funcional en el dual X^*, de acuerdo con el Corolario 3.3.1. $\square$

Corolario 3.3.4. *Si M es un subespacio vectorial cerrado de un espacio normado X y $x_0 \in X$, entonces $x_0 \in M$ si y sólo si todo funcional lineal y continuo $f : X \to \mathbb{R}$ que se anula en M se anula en x_0.*

Seguidamente, veremos en una tercera consecuencia cómo es posible encontrar una funcional lineal y continua cuyo "tamaño" está determinado por su valor en un punto.

Teorema 3.3.5. *Si X es un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demostración. Sea $M = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ y definamos $g : M \to \mathbb{K}$ como $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Entonces g es una aplicación lineal y continua sobre M, y cumple $\|g\| = 1$, $g(x_0) = \|x_0\|$. Por el Corolario 3.3.1, podemos extender g a un funcional $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\| = 1$ y $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos que, si $X \neq \{0\}$, entonces $X^* \neq \{0\}$. De hecho, el dual X^* *separa puntos* de X, es decir, si $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En efecto, basta tomar el vector $x_0 := x_1 - x_2$ en el teorema anterior.

En el caso especial de un espacio de Hilbert, sabemos, gracias al Teorema de Riesz, que existe una biyección entre H y H^*, dada por $y \mapsto T_y$, donde $T_y(x) := (x|y)$. Es más, dicha biyección es una isometría lineal que permite identificar H y H^* (Teorema 2.3.5).

3.4. Bidual. Espacios reflexivos

La identificación $H \equiv H^*$ mencionada en el párrafo anterior no sucede en otros espacios de Banach. Sin embargo, podemos obtener una identificación parcial usando biduales, tal como se verá seguidamente.

Si X es un espacio de Banach y X^* es su dual, el *bidual* de X se define como $X^{**} := (X^*)^*$. Consideremos la aplicación $\varphi : X \to X^{**}$ dada por $\varphi(x)(f) = f(x)$ para todo $f \in X^*$. Fácilmente se observa que φ es lineal. Por otra parte, si $x \in X$ y denotamos por $\|\cdot\|_{**}$ la norma en X^{**}, resulta

$$|\varphi(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|, \quad \text{luego} \quad \|\varphi(x)\|_{**} \leq \|x\|.$$

Consideremos ahora un funcional $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que $f(x) = \|x\|$. Entonces

$$|\varphi(x)(f)| = |f(x)| = \|f\|\,\|x\|, \quad \text{y por tanto} \quad \|\varphi(x)\|_{**} \geq \|x\|.$$

Deducimos que $\varphi : X \to \varphi(X) \subset X^{**}$ es una isometría. Decimos que el espacio X es *reflexivo* cuando φ es sobreyectiva. En tal caso podemos identificar X con su bidual X^{**}.

Por ejemplo, todo espacio de Hilbert H es reflexivo. En efecto, H puede identificarse con H^* por el Teorema de Riesz. A su vez, H^* puede identificarse con H^{**}, luego $H \equiv H^{**}$. De hecho, con las notaciones anteriores, se tiene que $\varphi(y)(T_x) = T_{T_y}(T_x)$ para todo $x, y \in H$.

Mas no todo espacio reflexivo es de Hilbert, como mostraremos en el siguiente ejemplo, con el que concluimos este capítulo. No obstante, ya que el dual de un espacio normado es de Banach, deducimos que todo espacio reflexivo es un espacio de Banach.

Ejemplo 3.4.1. Sea $p \in (1, +\infty)$. Entonces ℓ_p^* es isométricamente isomorfo a ℓ_q, donde q es el exponente conjugado de p, es decir, el número $q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto, sea $y = (y_k) \in \ell_q$. Consideremos la aplicación $\Lambda : y \in \ell_q \mapsto \Lambda_y \in \ell_p^*$ dada por

$$\Lambda_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{si} \quad x = (x_k).$$

Esta aplicación está bien definida. En efecto, gracias a la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$|\Lambda_y(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} \le \|y\|_q \|x\|_p.$$

Luego Λ está bien definida, pues cada Λ_y es, claramente, lineal, y es continua con $\|\Lambda_y\| \le \|y\|_q$. Si se aplica al vector $x = (\alpha_n)$, dado por

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{|y_n|^q}{y_n} & \text{si} \quad y_n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y_n = 0, \end{cases}$$

resulta que $x \in \ell_p$ (pues $|\alpha_n|^p = |y_n|^q$) y

$$|\Lambda_y(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q,$$

de donde obtenemos $\|\Lambda_y\| = \|y\|_q$ para todo $y \in \ell_q$. Así que Λ es una isometría lineal. Basta ver que Λ es sobreyectiva.

Para ello, fijemos $\Delta \in \ell_p^*$. Hemos de hallar un vector $y \in \ell_q$ tal que $\Lambda_y = \Delta$. Definimos $y = (y_n) = (\Delta(e_n))$, donde los e_n son los vectores $(0,0,\dots,0,0,1,0,0,\dots)$ de la base canónica de ℓ_q. Definamos los números α_n como antes, y fijemos $m \in \mathbb{N}$. Tenemos:

$$\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \Delta(e_n) = \Delta\left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n\right)$$

$$\le \|\Delta\| \left(\sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^p\right)^{1/p} = \|\Delta\| \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q\right)^{1/p}.$$

Por tanto

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q\right)^{1/q} \le \|\Delta\| = \text{ constante } < +\infty \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < +\infty$, así que $y \in \ell_q$. Es suficiente mostrar que $\Lambda_y = \Delta$. Esto es fácil, pues ambas aplicaciones coinciden sobre $A := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por linealidad, coinciden sobre $\operatorname{span} A$. Finalmente, por continuidad, coinciden sobre $\overline{\operatorname{span}}\, A$, que es todo ℓ_p: en efecto, si $x = (x_n) \in \ell_p$, entonces la sucesión de vectores de ℓ_p dada por $z_m = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$ $(m \in \mathbb{N})$ cumple $\|z_m - z\|_p^p = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \to 0$ $(m \to \infty)$, pues la última suma es el resto de una serie convergente. En conclusión, Λ es sobreyectiva, como se requería.

Puesto que la relación de conjugación de exponentes es simétrica, se deduce que ℓ_q^* es isométricamente isomorfo a ℓ_p, luego ℓ_p^{**} puede identificarse a ℓ_p, y obtenemos que ℓ_p es reflexivo.

Sin embargo, el espacio de Banach c_0 no es reflexivo, pues su dual es isométrico a ℓ_1, cuyo dual, a su vez, es isométrico a ℓ_∞. Ya que c_0 es separable y ℓ_∞ no lo es, estos espacios no pueden ser isométricos (cfr. Ejercicio 3).

Ejercicios y Problemas

1.- Sean X, Y espacios de Banach, M un subespacio denso de X y $T : M \to Y$ un operador lineal y continuo. Probar que existe un único operador $\widetilde{T} : X \to Y$ que extiende T, es decir, $Tx = \widetilde{T}x$ si $x \in M$, y conserva la norma, es decir, $\|T\|_{L(M,Y)} = \|T\|_{L(X,Y)}$.

2.- Sean E, F espacios normados tales que $E \neq \{0\}$. Probar que F es completo si $L(E, F)$ es completo.

3.- (a) Probar que el dual de c_0 puede ser identificado isométricamente con ℓ_1 y que el dual de ℓ_1 puede ser identificado isométricamente con ℓ_∞.
(b) Probar que el espacio c_0 no es reflexivo.

4.- Supongamos que X es un espacio normado. Probar que si el espacio X^* es separable, entonces X es separable. ¿Es cierta la afirmación inversa?

5.- (a) Sea X un espacio de Banach reflexivo. Probar que para cada $\Delta \in X^*$ se tiene

$$\|\Delta\| = \max\{|\Delta(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

(b) Sea $\Lambda : c_0 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}.$$

Probar que Λ es continua y calcular su norma. Demostrar que no existe ningún vector $x \in c_0$ de norma uno tal que $\Lambda(x) = \|\Lambda\|$.

6.- Sea X el espacio de Banach $C([0, 1])$ con la norma del supremo.
(a) Probar que la aplicación $\Delta : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt - \int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

es lineal y continua, y calcular su norma.

(b) Probar que no existe ninguna función f en X con $\|f\| = 1$ tal que $\|\Delta\| = |\Delta(f)|$.

(c) Concluir que X no es reflexivo.

7.- Consideremos el espacio vectorial ℓ_∞ formado por todas las sucesiones acotadas. Probar que a cada sucesión (ξ_k) se le puede asociar un número real que denotaremos $\operatorname{LIM} \xi_k$ (llamado *límite de Banach*) que cumple las siguientes condiciones:

(a) LIM es una función lineal. (b) $\operatorname{liminf} \xi_k \le \operatorname{LIM} \le \operatorname{limsup} \xi_k$ (en particular, $\operatorname{LIM} \xi_k = \lim \xi_k$ si éste existe).

Indicación: Definir en el espacio c de todas las sucesiones convergentes el funcional lineal $\Lambda(x) = \lim \xi_k$, donde $x = (\xi_k)$, y en ℓ_∞ el funcional $p(x) = \operatorname{limsup} \xi_k$. Probar que Λ es continuo, que p es una subnorma y aplicar el Teorema de Hahn-Banach.

8.- Sean X e Y espacios normados, $x_0 \in X$ y $T \in L(X, Y)$. Probar:

(a) $\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^* \text{ con } \|\varphi\| \le 1\}$.

(a) $\|T\| = \sup\{|\varphi(Tx)| : x \in X \text{ con } \|x\| \le 1,\ \varphi \in Y^* \text{ con } \|\varphi\| \le 1\}$.

9.- Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Probar que $x \in \overline{\operatorname{span}} A$ si y sólo si, para toda funcional $\varphi \in X^*$ con $\varphi|_A = 0$, se verifica $\varphi(x) = 0$.

10.- Sea ℓ_1 el espacio vectorial formado por las sucesiones absolutamente sumables con la norma $\|(\xi_k)_k\| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|$, y ℓ_2 el espacio vectorial de las sucesiones de cuadrado sumable con la norma hilbertiana. Consideremos las aplicaciones lineales $T_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ y $T_2 : \ell_2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$T_1((\xi_k)_k) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{y} \quad T_2((\xi_k)_k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k}{k}.$$

(a) Probar que estas aplicaciones son continuas, y calcular sus normas.
(b) Determinar si las anteriores aplicaciones alcanzan o no sus normas en la bola unidad cerrada de sus respectivos dominios. Concluir que ℓ_1 no es reflexivo.

11.- Sea X un espacio normado. Un subespacio propio M de X es llamado un hiperplano (vectorial) si existe $a \in X \setminus M$ tal que $X = \text{span}\,\{M, a\}$.
(a) Probar que un subespacio cerrado M de X es un hiperplano si y sólo si existe $\Lambda \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $M = \text{Ker}\,(\Lambda)$.
(b) Llamamos hiperplano afín al trasladado de un hiperplano vectorial. Probar que M es un hiperplano afín cerrado si y sólo si existe $\Lambda \in X^* \setminus \{0\}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $M = \{x \in X : \Lambda(x) = a\}$.
(c) Sea x_0 un vector de norma 1 en X y sea Λ un funcional de norma 1 en X^*. Sea $M = \{x \in X : \Lambda(x) = 1\}$. Decimos que M es un hiperplano tangente a la bola unidad en x_0 si $x_0 \in M$ y $\Lambda(x) \leq 1$ para cada x de la bola unidad. Probar que para cada x_0 en la superficie esférica unidad existe al menos un hiperplano tangente.
(d) Se dice que X es estrictamente convexo si para cada x, y en la bola unidad y $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$. Probar que X es estrictamente convexo si y sólo si cada hiperplano tangente corta a la bola unidad cerrada en a lo más un punto.

12.- (a) Encontrar todos los elementos del dual de c_0 con norma 1 que alcancen su norma en el punto $x_0 = (1, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$.
(b) Para cada elemento Λ del dual de c_0 con norma 1 que alcanza su norma en x_0, determinar todos los vectores de la bola unidad cerrada de c_0 donde Λ alcanza su norma.
(c) ¿Es c_0 estrictamente convexo?

13.- Resolver el problema anterior sustituyendo c_0 por ℓ_1 y el punto x_0 por

$(1/2^n)_{n\geq 1}$.

14.- (a) Sea X el espacio c_0 y sea $x_0 = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. Encontrar todos los elementos del dual de c_0 con norma 1 que alcancen su norma en x_0.
(b) Sea X el espacio ℓ_2 y $x = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, \dots)$. Encontrar todos los elementos del dual de ℓ_2 de norma 1 que alcanzan su norma en x.
(c) Sea X un espacio de Hilbert y sea $x_0 \in X$ con norma 1. ¿Cuántos elementos del dual, de norma 1, alcanzan su norma en x_0?

15.- Sea M el subespacio de ℓ_2 formado por los vectores $x = (\xi_n)$ que verifican $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = 0$. Probar que M es denso en ℓ_2. *Sugerencia:* Considerar los vectores $e_n - e_{n+1}$, donde (e_n) es la base canónica de ℓ_2.

Capítulo 4

Principio de acotación uniforme

4.1. Introducción. Teorema de Baire

En este último capítulo vamos a establecer una serie de resultados sobre aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados, donde la completitud de los mismos juega un papel crucial. Tales resultados derivan de forma más o menos directa del Teorema de Baire, el cual nos da una propiedad importante de los espacios métricos completos. Lo enunciaremos y probaremos en esta sección.

Los teoremas de este capítulo se muestran útiles en la prueba de diversas propiedades de espacios funcionales o de aplicaciones entre espacios normados, como son:

- Demostración de la existencia de funciones con algún tipo de comportamiento singular.

- Demostración de la acotación uniforme de una familia de aplicaciones partiendo de su acotación puntual.

- Demostración de la continuidad de ciertas aplicaciones que son límite puntual de otras.

– Demostración de la continuidad de ciertas aplicaciones que son inversas de otras.

– Demostración de la continuidad de ciertas aplicaciones partiendo de propiedades más débiles que la continuidad.

Antes de establecer el Teorema de Baire, necesitamos definir algunos conceptos, de naturaleza puramente topológica. Recordemos que $\overline{A}$ y A^0 denotan, respectivamente, la clausura de A y el interior de A de un subconjunto A en un subespacio topológico, mientras que $B(a,r)$ ($\overline{B}(a,r)$) denota la bola abierta (cerrada, resp.) de centro a y radio $r > 0$ en un espacio métrico.

Definición 4.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es llamado

- *raro* o *denso en ninguna parte* cuando $\overline{A}^0 = \emptyset$.
- *magro* o *de primera categoría* cuando es unión numerable de subconjuntos raros.
- *de segunda categoría* cuando no es de primera categoría.
- *residual* cuando $X \setminus A$ es de primera categoría.

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{N}$ es raro, $\mathbb{Q}$ es de primera categoría, $(0,1)$ es de segunda categoría pero no residual, mientras que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es residual y de segunda categoría. En un espacio topológico general, todo subconjunto de un subconjunto de primera categoría es también de primera categoría, y la unión numerable de subconjuntos de primera categoría es de primera categoría.

Nota 4.1.2. La categoría de un conjunto nos da una idea de su tamaño. Podemos pensar que los conjuntos de primera categoría son pequeños y que sus complementarios (los residuales) son grandes. Pero para que esto tenga sentido hace falta que un conjunto no sea pequeño y grande a la vez. El Teorema de Baire nos muestra una clase de espacios en la que esto no puede suceder.

Teorema 4.1.3. [*Teorema de Baire*]. *Sea M un espacio métrico completo. Entonces la intersección numerable de abiertos densos es densa en M.*

Demostración. Denotemos $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n es un subconjunto abierto denso de M. Fijemos un subconjunto abierto G no vacío de M. Se ha de probar que $A \cap G \neq \emptyset$.

Ya que A_1 es denso, se tiene que $A_1 \cap G$ es abierto y no vacío. Así, existe una bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1)$ de M con $r_1 < 1$ tal que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset A_1 \cap G$. Ya que A_2 es denso, resulta que $A_2 \cap B(x_1, r_1)$ es un abierto no vacío, luego existe una bola cerrada $\overline{B}(x_2, r_2)$ de M con $r_2 < 1/2$ tal que $\overline{B}(x_2, r_2) \subset A_2 \cap B(x_1, r_1)$. Por un proceso inductivo, construimos bolas $B(x_n, r_n)$ de radio $r_n < 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ que verifican

$$\overline{B}(x_n, r_n) \subset A_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset A_n \cap G \quad (n \geq 2).$$

Veamos que la sucesión de centros (x_n) es de Cauchy para la métrica d de M. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, y fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > 2/\varepsilon$. Si $p, q \geq n_0$ se tiene $x_p, x_q \in \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0})$, luego

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{n_0}) + d(x_q, x_{n_0}) < r_{n_0} + r_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Al ser M completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_k : k \geq n\} \subset \overline{B}(x_n, r_n)$. Pero x está en la clausura de $\{x_k : k \geq n\}$, luego $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$, y esto es cierto para cada n. En conclusión,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subset (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cap G = A \cap G. \qquad \square$$

Llamaremos *espacio de Baire* a un espacio topológico M que cumpla la conclusión del teorema anterior, es decir, tal que la intersección numerable de abiertos densos es densa en M. Así pues, hemos demostrado que todo espacio métrico completo es de Baire.

Corolario 4.1.4. *Si M es un espacio métrico completo, entonces M es de segunda categoría en sí mismo.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que M es de primera categoría. Entonces existen subconjuntos raros R_n tales que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. Por tanto, tomando $F_n = \overline{R_n}$, resulta que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es un subconjunto cerrado de interior vacío. Sea $A_n = F_n^c$. Entonces cada A_n es abierto y denso, luego $\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es, por el Teorema de Baire, denso, lo cual es evidentemente una contradicción. □

Notas 4.1.1. 1. De hecho, es fácil probar que un espacio topológico es de Baire si y sólo si cada subconjunto abierto no vacío es de segunda categoría. Se tiene también que, si X es un espacio normado, entonces X es de Baire si y sólo si es X es de segunda categoría en sí mismo.

2. El Teorema de Baire no sólo es válido en espacios metrizables completos. Su conclusión se mantiene en espacios topológicos localmente compactos. Sin embargo, esta versión no se utilizará en lo que sigue.

4.2. Teorema de Banach-Steinhaus

El Teorema de Banach-Steinhaus, denominado también *Principio de la acotación uniforme*, nos dice que la acotación puntual de una familia de aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados es equivalente a su acotación uniforme, es decir, a su acotación en norma. Se ha de exigir que el espacio de salida sea completo. De hecho, podemos conseguir algo más, a saber, es suficiente que no sea demasiado pequeño el conjunto de puntos donde se da la acotación puntual. Como es habitual, denotaremos indistintamente por $\|\cdot\|$ la norma en los tres espacios normados X, Y, $L(X,Y)$.

Teorema 4.2.1. [*Teorema de Banach-Steinhaus*]. *Supongamos que X e Y son espacios normados y que $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Consideremos las siguientes propiedades:*
(a) *La familia $\mathcal{A}$ es puntualmente acotada, es decir,*

$$\sup_{\Lambda\in\mathcal{A}} \|\Lambda(x)\| < +\infty \quad \textit{para cada} \quad x \in X.$$

(b) *El conjunto $B = \{x \in X : \sup_{\Lambda\in\mathcal{A}} \|\Lambda(x)\| < +\infty\}$ es de segunda categoría.*
(c) *La familia $\mathcal{A}$ está uniformemente acotada, esto es, $\sup_{\Lambda\in\mathcal{A}} \|\Lambda\| < +\infty$.*

Entonces (b) *implica* (c), *y* (c) *implica* (a). *Si, además, X es un espacio de Banach, entonces las tres propiedades* (a), (b) *y* (c) *son equivalentes.*

Demostración. De la definición de norma de un elemento de $L(X,Y)$ se deduce la implicación (c) $\implies$ (a). Probemos que (b) implica (c).

Por reducción al absurdo, supongamos que B es de segunda categoría pero $\sup_{\Lambda\in\mathcal{A}} \|\Lambda\| = +\infty$. Consideremos los subconjuntos de X definidos por

$$F(\Lambda, n) = \{x \in X : |\Lambda(x)| \leq n\} \quad (\Lambda \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}).$$

Notemos que $F(\Lambda, n)$ es la preimagen por Λ del intervalo $[-n, n]$, luego cada $F(\Lambda, n)$ es cerrado, y así cada conjunto $F_n := \bigcap_{\Lambda\in\mathcal{A}} F(\Lambda, n)$ es cerrado en X. Ahora bien, se observa sin dificultad que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Por tanto, como B no es de primera categoría, existe N tal que $F_N^0 \neq \emptyset$. Entonces existe alguna bola cerrada $\overline{B}(z, \rho) \subset F_N$. Se deduce que $\|\Lambda(z + x)\| \leq N$ si $\|x\| \leq \rho$ para todo $\Lambda \in \mathcal{A}$. En consecuencia,

$$\|\Lambda(x)\| = \|\Lambda(z + x) - \Lambda(z)\| \leq 2N \quad \text{para todo} \quad x \in B(0, \rho) \quad \text{y todo} \quad \Lambda \in \mathcal{A}.$$

Por tanto $\|\Lambda\| \leq 2N/\rho$ para todo $\Lambda \in \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción.

Para terminar, si X es un espacio de Banach, entonces X es de segunda categoría por el Corolario 4.1.4. Esto prueba la implicación (a) $\implies$ (b). Por tanto (a), (b) y (c) son equivalentes en este caso. $\square$

Una útil consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus es que, cuando las aplicaciones son lineales, la simple convergencia puntual implica la continuidad de la función límite. Establecemos este hecho en el siguiente corolario.

Corolario 4.2.2. *Supongamos que X es un espacio de Banach, que Y es un espacio normado y que $\Lambda_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de aplicaciones lineales y continuas. Si para cada $x \in X$ la sucesión $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 1}$ es convergente, digamos a $\Lambda(x) \in Y$, entonces la aplicación $\Lambda : X \to Y$ es lineal y continua.*

Demostración. Debido a la convergencia de $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 1}$ en cada $x \in X$, se tiene que cada sucesión $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 1}$ es acotada. Por el Teorema 4.2.1, existe una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que $\|\Lambda_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De otra forma, $\|\Lambda_n(x)\| \leq M$ para todo x con $\|x\| = 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo que $n \to \infty$, obtenemos $\|\Lambda(x)\| \leq M$ para todo x con $\|x\| = 1$, así que Λ es continua. La linealidad de Λ resulta de la convergencia puntual. $\square$

Nos proponemos ilustrar el Teorema de Banach-Steinhaus con un interesante ejemplo. A saber, vamos a probar la existencia de funciones continuas con serie de Fourier divergente. En el Capítulo 1 vimos que para cualquier función f continua 2π-periódica –incluso para cualquier función de $L^2([0, 2\pi])$– su serie de Fourier converge a ella en norma cuadrática. Esto es, si $S_n(f, x)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f, se tiene $\|f - S_n\|_2 = (\int_0^{2\pi} (f(t) - S_n(t))\, dt)^{1/2} \to 0$ $(n \to \infty)$. También sabemos, por el Teorema de Fejér, que la sucesión de medias $\sigma_n(x)$ de $S_n(f, x)$ converge a f uniformemente en $[0, 2\pi]$. Por otra parte, hay condiciones suficientes que aseguran la convergencia puntual $S_n(f,x) \to f(x)$ en un punto concreto x. Nos preguntamos si será cierto que, para toda función continua y periódica f, se tiene que $S_n(f,x) \to f(x)$. Usando el Principio de Acotación Uniforme vamos a dar una respuesta negativa. Antes necesitamos hacer algunas modificaciones en la serie de Fourier de f.

Recordemos que a cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y 2π-periódica (o equivalentemente, a cada $f \in C([0,2\pi])$ con $f(0) = f(2\pi)$) se le puede asociar su serie trigonométrica de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt \;\; (n \geq 0) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt \;\; (n \geq 1).$$

Vamos a escribir cada suma parcial $S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ en una forma más compacta. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{i(n+1)t} - 1 - e^{it}}{2(e^{it} - 1)} \\ &= \frac{2e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{2(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})} = \frac{2e^{i(n+\frac{1}{2})t} - 2\cos\frac{t}{2}}{4i\operatorname{sen}\frac{t}{2}},\end{aligned}$$

y tomando partes reales,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}S_n(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right) dt,\end{aligned}$$

luego

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x)\, dt,$$

donde hemos denotado

$$D_n(t) := \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kt,$$

función conocida como *núcleo de Dirichlet*. Denotaremos

$$l_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, dt,$$

número conocido como *n-ésima constante de Lebesgue.*

Consideremos ahora el espacio vectorial $X := \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ dotado de la norma del supremo. Es claro que X es cerrado en $C([0, 2\pi])$, por lo cual es un espacio de Banach. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la forma lineal $u_n : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_n(f) = S_n(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) \, dt.$$

Si $\|f\| \leq 1$, es evidente que $|u_n(f)| \leq l_n$, luego $\|u_n\| \leq l_n$ para cada n. Probemos que $l_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ y que $\|u_n\| = l_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, obtenemos

$$l_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| \, dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} t\right|}{t} \, dt.$$

Ahora efectuamos el cambio de variable $t \mapsto \frac{2n+1}{2} t$, y resulta

$$l_n \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} \, dt > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t| \, dt = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$$

cuando $n \to \infty$, ya que la serie $\sum 1/n$ diverge. Por tanto $l_n \to +\infty$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto $J_n := \{t \in [0, 2\pi] : D_n(t) \geq 0\} = \bigcup_{k=0}^{n} [\frac{4k\pi}{2n+1}, \frac{4(k+2)\pi}{2n+1}]$. Definimos la función $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in J_n \\ -1 & \text{si} \quad x \in [0, 2\pi] \setminus J_n. \end{cases}$$

Notemos que el conjunto $[0, 2\pi] \setminus J_n$ es una unión finita de intervalos de la forma (a, b) con $b-a = 2\pi/(2n+1)$. Tomemos una sucesión (δ_k) de números reales positivos con $\pi/(2n+1) > \delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_k \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la función $f_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ como 1 en J_n, -1 en cada intervalo $[a+\delta_k, b-\delta_k]$, y lineal afín en cada intervalo $[a, a+\delta_k]$ y $[b-\delta_k, b]$. Entonces, para todo $t \in [0, 2\pi]$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene $f_k \in X$ y $|f_k(t)| \leq 1$, luego $\|f_k\| \leq 1$. Por otra parte, es fácil ver que $f_k(t) \to g(t)$ $(k \to \infty)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ (usar que $\delta_k \to 0$). Además

$$\int_0^{2\pi} g(t)D_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt.$$

Por otra parte, $|D_n(t)| = |1 + 2\sum_{k=1}^n \cos kt| \leq 2n+1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, luego, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{k\to\infty} u_n(f_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)D_n(t)\,dt = l_n.$$

En consecuencia $\|u_n\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |u_n(f)| = l_n$ para todo n. Luego $\sup\{\|u_n\| : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

Por el Teorema de Banach-Steinhaus, aplicado a la familia $\mathcal{A} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, resulta que el subconjunto de las funciones $f \in X$ tales que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f, 0)| < +\infty$ es de primera categoría. La demostración se ha realizado para $x_0 = 0$, pero es fácil adaptar la prueba a un punto arbitrario $x_0 \in [0, 2\pi]$. En consecuencia, hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3. *Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que el subconjunto de las funciones 2π-periódicas continuas cuya sucesión de sumas parciales de Fourier en x_0 no está acotada es residual. En particular, existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y 2π-periódica cuya sucesión de sumas parciales de Fourier no es convergente.*

4.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sabemos que si X e Y son dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en X cuando G es abierto en Y. Sin embargo, $f(U)$ puede no ser abierto aun cuando U sea abierto. Por ejemplo, tomar $X = \mathbb{R} = Y$, $f(x) = x^2$ y $U = (-1, 1)$. Nos proponemos demostrar que, bajo ciertas condiciones, una aplicación *lineal* y continua es abierta, es decir, transforma abiertos en abiertos. En particular, si f fuese biyectiva obtendríamos que f^{-1} es continua.

Teorema 4.3.1. [*Teorema de la Aplicación Abierta* o *Teorema del Homomorfismo*]. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y sobreyectiva. Entonces, para cada abierto U de X, el conjunto $T(U)$ es abierto en Y.*

Para su demostración, necesitamos los tres siguientes lemas. Usaremos las notaciones usuales $kA = \{kx : x \in A\}$, $A - x = \{a - x : a \in A\}$, $A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$, donde $k \in \mathbb{K}$, $x \in X$ y $A, B \subset X$.

Lema 4.3.2. *Supongamos que X es un espacio normado, que $A \subset X$ y que $k \in \mathbb{R}$. Entonces $\overline{kA} = k\overline{A}$ y $(kA)^0 = kA^0$.*

Demostración. Si $k = 0$, la conclusión es trivial. Por la Proposición 2.2.3, cada aplicación $F_k : x \in X \mapsto kx \in X$ es continua. Pero si $k \neq 0$ se tiene además que F_k es un homeomorfismo (es decir, biyectiva y bicontinua) pues existe $(F_k)^{-1}$ y es igual a $F_{1/k}$. Por tanto $\overline{F_k(A)} = F_k(\overline{A})$ y $(F_k(A))^0 = F_k(A^0)$, que es exactamente la conclusión. $\square$

La prueba de la primera conclusión del lema anterior también puede hacerse usando la caracterización secuencial de la clausura de un conjunto en un espacio métrico. Utilizaremos esto en la demostración del lema siguiente.

Lema 4.3.3. *Supongamos que X es un espacio normado y que $A, B \subset X$. Entonces $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.*

Demostración. Si $x \in \overline{A} - \overline{B}$, entonces $x = u - v$ con $u \in \overline{A}$ y $v \in \overline{B}$. Así que existen sucesiones $(u_n) \subset A$, $(v_n) \subset B$ tales que $u_n \to u$ y $v_n \to v$. Entonces $(u_n - v_n)$ es una sucesión de puntos de $A - B$ tal que $u_n - v_n \to u - v = x$, así que $x \in \overline{A - B}$. □

Lema 4.3.4. *Supongamos que X es un espacio normado y que $G, C \subset X$, de modo que G es abierto. Entonces $G - C$ es abierto.*

Demostración. Gracias a la Proposición 2.2.3, cada traslación $x \in X \mapsto x + a \in X$ es un homeomorfismo. Entonces $G - y$ es un abierto para cada $y \in X$, luego $G - C$ es también abierto, ya que $G - C = \bigcup_{y \in C}(G - y)$. □

Demostración del Teorema de la Aplicación Abierta. Llamemos A_ε, B_ε a las bolas abiertas, respectivamente en X e Y, de centro 0 y radio ε. Supongamos probada la siguiente propiedad:

(P) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset \overline{T(A_\varepsilon)}$.

Sea ahora $U \subset X$ abierto y fijemos $y \in T(U)$. Entonces existe $x \in U$ tal que $Tx = y$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + A_\varepsilon \subset U$. Según (P), existe $\delta > 0$ con $B_\delta \subset T(A_\varepsilon)$. Se deduce que $y + B_\delta \subset y + T(A_\varepsilon) = Tx + T(A_\varepsilon) = T(x + A_\varepsilon) \subset T(U)$. Por tanto, $y \in T(U)^0$ para cada $y \in T(U)$, luego $T(U)$ es abierto. Basta pues probar (P).

Fijemos $\varepsilon > 0$. Denotemos $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada n fijo se tiene $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kA_{\varepsilon_n}$. Así $Y = T(\bigcup_{k=1}^{\infty} kA_{\varepsilon_n}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kA_{\varepsilon_n})$. Como Y es completo, por el Teorema de Baire existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(kA_{\varepsilon_n})}$ tiene interior no vacío. Además, gracias al Lema 4.3.2, obtenemos

$$\overline{T(A_{\varepsilon_n/2})} = \overline{T(\frac{1}{2k}kA_{\varepsilon_n})} = \overline{\frac{1}{2k}T(kA_{\varepsilon_n})} = \frac{1}{2k}\overline{T(kA_{\varepsilon_n})}.$$

Usando de nuevo el Lema 4.3.2, $\overline{T(A_{\varepsilon_n/2})}$ tiene interior no vacío. Por tanto, contiene algún abierto no vacío V_n. Tenemos entonces, gracias a la linealidad de T y al Lema 4.3.3, lo siguiente:

$$\overline{T(A_{\varepsilon_n})} \supset \overline{T(A_{\varepsilon_n/2}) - T(A_{\varepsilon_n/2})} \supset \overline{T(A_{\varepsilon_n/2})} - \overline{T(A_{\varepsilon_n/2})} \supset V_n - V_n.$$

Por el Lema 4.3.4, $V_n - V_n$ es un abierto. Pero $0 \in V_n - V_n$, luego existe algún $\delta_n \in (0, 1/n)$ tal que

$$B_{\delta_n} \subset V_n - V_n \subset \overline{T(A_{\varepsilon_n})}.$$

Vamos a probar

$$B_{\delta_1} \subset T(A_\varepsilon), \tag{1}$$

lo que concluiría la prueba de (P) y por tanto la demostración del teorema.

Fijemos $y \in B_{\delta_1}$. Como $B_{\delta_1} \subset \overline{T(A_{\varepsilon_1})}$, existe $x_1 \in A_{\varepsilon_1}$ tal que $\|y - Tx_1\| < \delta_2$, así que $y - Tx_1 \in B_{\delta_2}$. Como $B_{\delta_2} \subset \overline{T(A_{\varepsilon_2})}$, existe $x_2 \in A_{\varepsilon_2}$ tal que $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \delta_3$, así que $y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\delta_3}$. Continuamos por inducción construyendo una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que

$$x_k \in A_{\varepsilon_k} \quad \text{y} \quad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \delta_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Llamemos $z_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Fijemos $\alpha > 0$ y escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ con $2^{n_0} > \varepsilon/\alpha$. Si $m > n \geq n_0$, tenemos

$$\|z_m - z_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2^n} < \alpha,$$

de donde resulta que (z_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo X. En consecuencia, $z_n \to z$ para algún $z \in X$ y, gracias a la continuidad de T, resulta $Tz_n \to Tz$. Además, de la primera parte de (2) se obtiene

$$\|z\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Por tanto $z \in A_\varepsilon$. Por último, de la segunda parte de (2) y de la linealidad de T deducimos que $\|y - Tz_n\| \leq \delta_{n+1}$. Pero $\delta_{n+1} \to 0$, así que $Tz_n \to y$, luego, por la unicidad del límite, $y = Tz$, lo cual prueba (1). □

Recordemos que una aplicación T entre dos espacios normados es un *isomorfismo* (más propiamente, un *isomorfismo topológico*) cuando es lineal, biyectiva y bicontinua, esto es, T y T^{-1} son continuas.

Corolario 4.3.5. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal, biyectiva y continua. Entonces T es un isomorfismo topológico. En particular, existe $\delta \in (0, +\infty)$ tal que*

$$\|Tx\| \geq \delta\|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Demostración. De acuerdo con el teorema anterior, la aplicación T es abierta, luego T^{-1} es continua. Se deduce que existe una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que $\|T^{-1}y\| \leq M\|y\|$ para todo $y \in Y$. Llamando $x = T^{-1}y$ se tiene $\|x\| \leq M\|Tx\|$ para todo $x \in X$. Basta tomar $\delta = 1/M$. □

4.4. Teorema del Grafo Cerrado

Comenzaremos esta última sección con una definición.

Definición 4.4.1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos X e Y. El *grafo* de f se define como el conjunto

$$\operatorname{Graf} f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Decimos que f tiene *grafo cerrado* cuando $\operatorname{Graf} f$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$, dotado de la topología producto.

Nota 4.4.2. Si X e Y son métricos, se puede dar la definición por sucesiones. Se tiene que f tiene grafo cerrado si $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ implica $y = f(x)$, o lo que es lo mismo, si $[x_n \to x \text{ y } f(x_n) \to y]$ implica $y = f(x)$.

Es fácil probar que si f es continua e Y es separado entonces f tiene grafo cerrado. Recordemos que un espacio topológico T es separado, o de Hausdorff, cuando, dados dos puntos distintos $a, b \in T$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $a \in U$ y $b \in V$. En particular, todo espacio métrico es separado.

Proposición 4.4.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos X e Y, de manera que Y es de Hausdorff. Entonces f tiene grafo cerrado.*

Demostración. Sea $W = (X \times Y) \setminus \operatorname{Graf} f$. Hay que probar que W es abierto. Para ello, fijamos un punto $(a, b) \in W$. Entonces $b \neq f(a)$. Ya que Y es de Hausdorff, podemos encontrar abiertos dos abiertos U y V con $U \cap V = \emptyset$, $f(a) \in U$ y $b \in V$. Al ser f continua, existe un abierto $G \subset X$ con $a \in G$ tal que $f(G) \subset U$. Obtenemos que $G \times V$ es un subconjunto abierto de $X \times Y$ que contiene el punto (a, b), y además $G \times V \subset W$. En efecto, si $x \in G$ entonces $f(x) \in U$, luego $f(x) \notin V$, así que $(x, f(x)) \notin G \times V$. En consecuencia, W es un entorno de cada uno de sus puntos, y por tanto es abierto. $\square$

No obstante, el recíproco de la proposición anterior no es, en general, cierto. Veamos dos ejemplos para ilustrar este hecho.

Ejemplos 4.4.4. 1. Se define la función $f : X \to Y$, donde $X = \mathbb{R} = Y$, por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Obviamente f no es continua. Sin embargo, si $x_n \to x$ y $f(x_n) = 1/x_n \to y$, necesariamente $x \neq 0$ e $y = 1/x = f(x)$. Por tanto f tiene grafo cerrado.

2. Consideremos los espacios $X = C^1([0,1])$ e $Y = C([0,1])$, ambos dotados de la norma del supremo. Definamos $T : X \to Y$ como $Tx = x'$, la derivada de la función $x(t)$. Supongamos que $x_n \to x$ en X y $Tx_n \to y$ en Y. Entonces $x_n \to x$ y $x_n' \to y$ uniformemente en $[0, 1]$. De un conocido resultado de

Cálculo Diferencial se obtiene que x es derivable con $x' = y$. Así que T tiene grafo cerrado. Sin embargo, T no es continua. En efecto, sea (x_n) la sucesión dada por $x_n(t) = t^n$. Entonces $\|x_n\| = 1$ para todo n, mientras que $\|Tx_n\| = \|x'_n\| = \|nt^{n-1}\| = n \to +\infty$.

Notemos que en el primer ejemplo, tanto X como Y son espacios de Banach, pero la aplicación no es lineal. Sin embargo, en el segundo, la aplicación es lineal, mientras que uno de los dos espacios ($C^1([0,1])$ en este caso) no es de Banach. Podemos sospechar que es la combinación de linealidad y de ser ambos espacios de Banach lo que da lugar a la continuidad. Esto es lo que nos dice el siguiente útil e importante teorema.

Teorema 4.4.5. [*Teorema del Grafo Cerrado*]. *Supongamos que X e Y son espacios de Banach y que $f : X \to Y$ es una aplicación lineal con grafo cerrado. Entonces f es continua.*

Demostración. Sabemos (ver, por ejemplo, el Ejercicio 11 del Capítulo 2) que $X \times Y$ es un espacio de Banach con la norma $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sea G el grafo de f. Entonces G es un subespacio vectorial de $X \times Y$, y es cerrado, luego G es un espacio de Banach. La aplicación proyección $\pi_1 : (x, f(x)) \in G \mapsto x \in X$ es lineal, continua y biyectiva. Por el Corolario 4.3.5, su inversa $\pi_1^{-1} : x \in X \mapsto (x, f(x)) \in G$ es continua. Ahora bien, la aplicación proyección $\pi_2 : (x,y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ es trivialmente continua, y se tiene $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. En consecuencia, f es continua. □

Concluimos con la siguiente versión secuencial del teorema anterior.

Corolario 4.4.6. *Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal entre dos espacios de Banach X e Y. Supongamos que para cada sucesión $(x_n) \subset X$ con $x_n \to 0$ y (Tx_n) convergente se tiene que $Tx_n \to 0$. Entonces T es continua.*

Demostración. Según el Teorema 4.4.5, es suficiente probar que f tiene grafo cerrado. Sea pues (u_n) una sucesión en X con $u_n \to u$ tal que $Tu_n \to v$, para ciertos $u \in X$, $v \in Y$. Se ha de demostrar que $Tu = v$. Pero esto es inmediato, porque haciendo $x_n := u_n - u$ ($n \in \mathbb{N}$) resulta que $x_n \to 0$ y $Tx_n \to v - Tu$. □

Ejercicios y Problemas

1.- Supongamos que X es un espacio topológico, Y un espacio métrico y f una función de X en Y. Para cada $x \in X$ definimos

$$\omega(x) = \inf\{\mathrm{diam}(f(U)) : U \text{ es un entorno de } x\}.$$

La función ω se llama la *función de oscilación* de f. Probar lo siguiente:

(a) La función f es continua en x si y sólo si $\omega(x) = 0$.

(b) Para cada número real α, el conjunto $\{x \in X : \omega(x) < \alpha\}$ es abierto en X.

(c) El conjunto $\{x \in X : f \text{ es continua en } x\}$ es un G_δ, esto es, una intersección numerable de abiertos.

(d) No existe ninguna función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que es continua en los puntos racionales y discontinua en los irracionales.

(e) Existen funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son continuas en los irracionales y discontinuas en los racionales.

2.- Consideremos el espacio $X = C([0,1])$ con la norma del supremo. Sea $c \in (0,1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_n = \{f \in X : \text{ existe } x \in [0,c] \text{ tal que } \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n \text{ para todo } h \in (0, 1-c)\}.$$

Probar lo siguiente:

(a) Los conjuntos A_n son cerrados.

(b) Para cada función $f \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua h, lineal a trozos, tal que $\|f - h\| < \varepsilon$.

(c) Los conjuntos A_n tienen interior vacío.

(d) El subconjunto de X formado por las funciones que son derivables por la derecha en algún punto de $[0, c]$ es de primera categoría en X.

(e) El subconjunto de X formado por las funciones que son derivables por la derecha en algún punto de $[0, 1)$ es de primera categoría en X.

(f) El subconjunto de X formado por las funciones que son derivables en algún punto de $[0, 1]$ es de primera categoría en X.

3.- Sea X un espacio de Banach con una base algebraica numerable.

(a) Probar que X es de dimensión finita.

(b) Probar que existen espacios normados de dimensión infinita numerable.

4.- Sea X el espacio c_{00} con la norma de ℓ_2. Sea $\{\Delta_n\}$ una sucesión de formas lineales definidas por $\Delta_n(x) = n\xi_n$ si $x = (\xi_n)$. Demostrar las siguientes propiedades:

(a) Cada Δ_n es una forma lineal continua.

(b) Para cada $x \in X$ se tiene $\sup\{|\Delta_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

(c) $\sup\{\|\Delta_n\| : n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Concluir que la completitud es esencial en el Principio de la Acotación Uniforme y que c_{00} es un conjunto de primera categoría en ℓ_2.

5.- Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Supongamos que, para cada $\Delta \in X^*$, el conjunto $\{\Delta(x) : x \in A\}$ es acotado. Probar que A es acotado.

6.- Supongamos que $X = C([0, 1])$, dotado de la norma del supremo.

(a) Probar que, para cada $t \in [0, 1]$, la aplicación δ_t –llamada *homomorfismo de evaluación*– dada por $\delta_t(f) = f(t)$ es una forma lineal y continua.

(b) Construir una sucesión (f_n) en X tal que el conjunto $\{f_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado para cada $t \in [0,1]$ pero el conjunto $\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ es no acotado.

(c) Utilizando el Ejercicio 5, probar que existen elementos de norma 1 en el dual de X que no son homomorfismos de evaluación.

7.- (a) Sea $1 < p < \infty$ y q el exponente conjugado de p. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de escalares tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ es convergente para cada sucesión (ξ_n) de ℓ_p. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q < \infty$.

(b) Supongamos ahora que (α_n) es una sucesión de escalares tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ es convergente para cada sucesión (ξ_n) de ℓ_1. Probar que $\sup_n |\alpha_n| < \infty$.

(c) Supongamos, por último, que $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de escalares tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ es convergente para cada sucesión (ξ_n) de c_0. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

8.- Sean X, Y, Z espacios de Banach y $B : X \times Y \to Z$ una aplicación lineal y continua en cada componente. Sea (x_n) una sucesión en X convergente a un punto x_0. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\Lambda_n : Y \to Z$ por $\Lambda_n(y) = B(x_n, y)$.

(a) Probar que existe el límite de la sucesión $\{\Lambda_n(y)\}$ para cada $y \in Y$.

(b) Probar que existe $M \in (0, +\infty)$ tal que $\|\Lambda_n(y)\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Probar que B es continua.

9.- Probar que no existe una sucesión de números reales $\{b_n\}$ tal que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reales converge absolutamente si y sólo si $\{a_n b_n\}$ es una sucesión acotada.

10.- Para cada $x \in L^1([0, 2\pi])$, sea

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Supongamos que X es un subespacio cerrado de $L^1([0, 2\pi])$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$ para cada $x \in X$. Probar que existe una constante $M \in (0, +\infty)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \leq M \int_0^{2\pi} |x(t)|\, dt$$

para todo $x \in X$.

11.- Sea $\|\cdot\|$ una norma en $C([0, 1])$ que lo hace completo y tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$ implica que $\{f_n\}$ tiende a 0 puntualmente. Probar que esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, la norma del supremo.

12.- Sea c el espacio de Banach formado por las sucesiones (ξ_k) tales que existe $\lim_{k\to\infty} \xi_k \in \mathbb{K}$, con la norma del supremo. Consideremos la aplicación $T : c \to c_0$ dada por

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\lambda, \xi_1 - \lambda, \xi_2 - \lambda, \dots).$$

Probar que T es un isomorfismo entre los espacios de Banach c y c_0. Calcular $\|T\|$ y $\|T^{-1}\|$.

13.- Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X, X)$ con $\|T\| < 1$. Probar que $I - T$ es un isomorfismo topológico de X sobre sí mismo, donde I denota el operador identidad en X. *Indicación:* Probar que, para cada $x \in X$, la sucesión $\{S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} T^k x\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, donde $T^0 = I$, $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$, etc.

14.- Supongamos que X e Y son espacios normados, de modo que X es de Banach. Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal tal que $T(X)$ es un subespacio vectorial de Y de dimensión infinita numerable. Probar que T no es continua.

15.- Sea X un espacio topológico.

(a) Probar que X es de Baire si y sólo si la intersección de cada familia numerable de abiertos densos en X es densa en X.

(b) Demostrar que X es de Baire si y sólo si la unión de cada familia numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío.

(c) Sea $A \subset X$. Demostrar que A es residual si y sólo si contiene alguna intersección numerable de abiertos densos.

(d) Si X es un espacio normado, probar que X es de Baire si y sólo si X es de segunda categoría en sí mismo.

(e) Dar un ejemplo de un espacio topológico de segunda categoría en sí mismo que no sea de Baire.

16.- Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$.

(b) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ e $\operatorname{Imagen}(T)$ es un subespacio cerrado de Y.

17.- Sea X el espacio de Banach $X = (C^1([0,1]), \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| + |f'(t)| \,:\, t \in [0,1]\}$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la aplicación

$$\Lambda_n(f) = n(f(1/n) - f(0)).$$

Probar que cada Λ_n es lineal y continua y que

$$\sup\{\|\Lambda_n\| \,:\, n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

18.- Sea Y el espacio de normado $Y = (C^1([0,1]), \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la aplicación lineal

$\Lambda_n : Y \to \mathbb{R}$ como en el ejercicio anterior.

(a) Probar que cada Λ_n es continua.

(b) Demostrar que para toda función $f \in Y$ se tiene $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(f) = f'(0)$.

(c) Utilizando la sucesión $f_n(t) = (1-t)^n$, comprobar que la aplicación $\Lambda : Y \to \mathbb{R}$ definida por $\Lambda(f) = f'(0)$ no es continua.

(d) Probar que Y es de primera categoría.

19.- (a) Probar que en $C^1([0,1])$ existen sucesiones que convergen uniformemente en $[0,1]$ a funciones no derivables.

(b) Sea X el espacio $(C^1([0,1]), \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es una norma que lo hace completo y tal que, para cada sucesión $(f_n) \subset C^1([0,1])$ con $\|f_n\| \to 0$, se tiene que $f_n(t) \to 0$ para cada $t \in [0,1]$. Probar que una sucesión (f_n) converge a una función f en X si y sólo si (f_n) converge a f uniformemente en $[0,1]$ y (f_n') converge a f' uniformemente en $[0,1]$

(c) Concluir que $C^1([0,1])$ con la norma del supremo no es completo.

20.- Sea $p \in [1,+\infty)$, y sea X el espacio ℓ_p con una norma $\|\cdot\|$ que lo hace completo y cumple la siguiente propiedad:

> Sea $\{x_n = (\xi_m^{(n)})_m : n \geq 1\} \subset \ell_p$. Si $x_n \to 0$ en X, entonces tiende a 0 componente a componente, esto es, $\lim_{n\to\infty} \xi_m^{(n)} = 0$ para cada m.

Probar que esta norma es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_p$ de ℓ_p.

Bibliografía

Existe una abundante bibliografía introductoria al Análisis Funcional. Los libros que a continuación se enumeran constituyen sólo una pequeña parte. Cada uno de ellos ha sido usado en la elaboración de alguna o algunas secciones de la presente obra, pero hay que tener en cuenta que el enfoque de los temas a tratar puede variar de libro a libro. Por supuesto, todos contienen mucho más material adicional, material que puede ayudar al estudiante tanto a profundizar en la teoría dada aquí como a introducirse en temas nuevos. Además, la mayoría de los textos sugeridos contienen listados de ejercicios y problemas sobre las materias tratadas, y en algunos casos se dan sugerencias para resolverlos. El último libro citado abajo está completamente dedicado a la resolución de ejercicios.

G. Bachman y L. Narice, *Análisis Funcional*, Tecnos, 1981.

S.K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, Teide, 1977.

H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza, 1984.

Y. Eidelman, V. Milmann and A. Tsolomitis, *Functional Analysis. An Introduction*, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 66, American Mathematical Society, Providence, 2004.

A.N.K. Kolmogorov y S.V. Fomin, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Mir, Moscú, 1975.

L. Lusternik et V. Sobolev, *Précis d'analyse fonctionelle*, Mir, Moscu, 1989.

R. Meise and D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Science Publications, 1997.

W. Rudin, *Análisis Funcional*, Reverté, 1979.

K. Saxe, *Beginning Functional Analysis*, Springer, 2002.

M. Schehter, *Principles of Functional Analysis*, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 36, American Mathematical Society, Providence, 2002.

A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley, 1980.

V.A. Trenoguin, B.M. Pisarievski y T.S. Soboleva, *Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional*, Mir, Moscú, 1987.

Índice alfabético

Adherencia, 12
Aplicación
  abierta, 74
  continua, 13
  lineal continua, 39
  lineal uniformemente continua, 39

Base
  algebraica, 22
  canónica, 42
  ortonormal, 26
Bidual de un espacio normado, 57
Bola
  abierta, 12
  cerrada, 67

Cadena, 52
Cierre, 12
Clausura, 12
Coeficientes de Fourier, 21
Conjunto parcialmente ordenado, 52
Constante de Lebesgue, 72

Desigualdad
  de Bessel, 23
  de Cauchy-Schwarz, 9
  de Hölder, 35
  de Minkowski, 35
  triangular, 9
  triangular inversa, 9
Distancia, 11
  cuadrática, 12
  entre dos conjuntos, 13
  entre un punto y un conjunto, 13

Elemento maximal, 52
Espacio
  L^1 de Lebesgue, 10
  L^2 de Lebesgue, 10
  L^p de Lebesgue, 36
  $\mathbb{R}^N$, 9
  ℓ_2, 10
  ℓ_∞, 36
  ℓ_p, 36
  c_0, 36
  c_{00}, 36
  de Baire, 68
  de Banach, 38
  de funciones continuas, 10
  de Hausdorff o separado, 78
  de Hilbert, 13

de Hilbert complejo, 28
dual, 41
estrictamente convexo, 62
métrico, 12
métrico completo, 12
normado, 34
prehilbertiano, 8
reflexivo, 57
topológico, 12
topológico separable, 26
vectorial, 8
vectorial cociente, 48
Espacios isométricos, 26
Exponente conjugado o dual, 35

Familia
puntualmente acotada, 69
uniformente acotada, 69
Forma, 20
bilineal, 8
Función
cóncava, 34
de oscilación, 80
sublineal, 52
Funcional, 20

Grafo de una aplicación, 77

Hiperplano
afín, 62
tangente, 62
vectorial, 62
Homeomorfismo, 74
Homomorfismo de evaluación, 81

Identidad
de Apolonio, 32
de Parseval, 23
de Polarización, 39
del paralelogramo, 9
Isometría, 26
Isomorfismo, 40

Límite de Banach, 61
Lema
de Fatou, 15
de Riesz, 44
de Zorn, 52

Método de Gram-Schmidt, 22
Medida de Lebesgue, 10

Núcleo
de Dirichlet, 72
de una aplicación lineal, 20
Norma, 8
cuadrática, 8
de un operador lineal, 41
del supremo, 36
monótona, 47
Normas equivalentes, 40

Operador
adjunto, 49
autoadjunto, 49

de Volterra, 48
lineal, 39

Principio de Acotación Uniforme, 68
Producto escalar, 8
Proyección de un vector, 17
Proyección ortogonal, 18

Serie
Cesàro convergente, 27
de Fourier, 23
Sistema
ortonormal completo, 24
ortonormal maximal, 25
trigonométrico, 21
Span A, 22
Subconjunto
abierto, 12
acotado, 42
cerrado, 12
compacto, 42
convexo, 16
de segunda categoría, 66
magro o de primera categoría, 66
ortogonal, 21
ortonormal, 21
raro o denso en ninguna parte, 66
residual, 66
total, 24
Subespacio
cerrado, 18
de dimensión finita, 21
vectorial, 11
Subnorma, 52
Sucesión
convergente, 12
de Cauchy, 12

Teorema
de Baire, 67
de Banach-Steinhaus, 69
de Fejér, 26
de Hahn-Banach, 52
de Heine-Borel, 44
de la Aplicación Abierta o del Homomorfismo, 74
de la Convergencia Dominada, 73
de la Proyección, 18
de Pitágoras, 22
de representación de Riesz, 20
de Riesz y Fischer, 15
del Grafo Cerrado, 79
del vector minimizante, 16